THE LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF
NORTH CAROLINA

ENDOWED BY THE
DIALECTIC AND PHILANTHROPIC
SOCIETIES

378.471
K4B
v.1

THE LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF
NORTH CAROLINA

ENDOWED BY THE
DIALECTIC AND PHILANTHROPIC
SOCIETIES

BUILDING USE ONLY

Q4
.I4
1869
no. 1

fine of -
DUE o:

Zu/k35

ПРОТОКОЛЫ

ЗАСѢДАНІЙ СОВѢТА

ИМПЕРАТОРСКАГО

ХАРЬКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

И ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ НИМЪ.

1869 ГОДА.

№ 1.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.

1869.

PRINTED IN RUSSIA

Протоколы засѣданій совѣта Императорскаго харьковскаго университета и Приложенія къ нимъ

въ 1869 году издаются по слѣдующей программѣ:

I. Протоколы совѣтскихъ засѣданій.

II. Приложенія къ протоколамъ.

a) Ученые труды преподавателей университета.

b) Сочиненія и переводы студентовъ.

c) Диссертаціи на ученыя степени, pro venia legendi, пробныя и вступительныя лекціи, читанныя въ университетѣ.

d) Отчеты преподавателей по ученымъ командировкамъ.

e) Отчеты о занятіяхъ стипендіатовъ, оставленныхъ при университетѣ для приготовленія къ профессорскому званію.

f) Извѣстія о происходившихъ въ факультетахъ диспутахъ съ присоединеніемъ рецензій диссертацій, подвергавшихся публичному защищенію.

g) Извѣстія о работахъ профессоровъ и студентовъ въ лабораторіяхъ и другихъ учебно-вспомогательныхъ учрежденіяхъ университета; сообщенія объ особенно замѣчательныхъ случаяхъ, представившихся въ практикѣ факультетскихъ клиникъ, при патологическихъ и судебно-медицинскихъ вскрытіяхъ; о замѣчательныхъ хирургическихъ и акушерскихъ операціяхъ и т. п.

nw
bio

Q4
.I4
1869
no.1

ПРОТОКОЛЫ

ЗАСѢДАНІЙ СОВѢТА

ИМПЕРАТОРСКАГО

ХАРЬКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

И ПРИЛОЖЕНІЯ КЪ НИМЪ.

1869 ГОДА.

№ 1.

ХАРЬКОВЪ.
Въ Университетской Типографіи.

1869.

Напечатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Харьковскаго Университета.

Ректоръ *В. Кочетовъ.*

LIBRARY UNIV. OF
NORTH CAROLINA

СОДЕРЖАНІЕ.

Стр.

I. Протоколъ засѣданія совѣта 14 января 1869 года. 1.

— — — 28 января — — 19.

II. Приложенія:

Извлеченіе изъ отчета о состояніи и дѣятельности Императорскаго харьковскаго университета, за 1868 годъ . . . . . 1—45.

Монографія ученія о притяженіи и теорія потенціаловъ. Приватъ-доцента *В. Алексѣева*. I—VI и 1—80.

378.477
K4B
v.1
937168

I.

ПРОТОКОЛЪ ЗАСѢДАНІЯ СОВѢТА

14 января.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ г. ректора, 23 члена. Не присутствовали проф.: Рославскій-Петровскій, Лавровскій 2-й, Каченовскій, Бейеръ и Петровъ.

Слушали 41 статью.

а) Предложенія г. попечителя харьковскаго учебнаго округа.

Ст. 1 и 2. Отъ 24 и 31 декабря за №№ 3638 и 3684, объ утвержденіи магистра *Бріо* доцентомъ, съ порученіемъ ему, на основаніи § 20 устава, вакантной каѳедры минералогіи, и лѣкаря *Краснова* ординаторомъ при хирургическомъ отдѣленіи клиники.

При этомъ доложено было, что о вышеизложенномъ сообщено въ правленіе, физико-математическій и медицинскій факультеты. — *Опр.* Составить по установленной формѣ формулярные списки гг. Бріо и Краснова и сдѣлать въ нихъ надлежащія отмѣтки по принадлежности.

Ст. 3. Отъ 31 декабря за № 3685, о разрѣшеніи на командированіе проф. *Бекетова* депутатомъ отъ харьковскаго у-

ниверситета, на имѣющее быть, 8 февраля сего года, торжество пятидесятилѣтняго юбилея с.-петербургскаго университета, съ выдачею ему на путевыя издержки 350 р., изъ спеціальныхъ средствъ университета. — *Опр.* Предоставить г. ректору сдѣлать по этому предмету надлежащее распоряженіе.

Ст. 4. Отъ 11 января за № 72, на имя г. ректора: «Совѣтъ университета св. Владиміра, согласно представленію медицинскаго факультета, въ засѣданіи своемъ 20 минувшаго декабря, подвергалъ баллотированію экстра-ординарнаго профессора харьковскаго университета *Хронщевскаго* на должность ординарнаго профессора въ университетѣ св. Владиміра по каѳедрѣ общей патологіи, и большинствомъ голосовъ (21 противъ 7-ми) избралъ г-на Хронщевскаго въ упомянутую должность.

Въ слѣдствіе сего, совѣтъ университета св. Владиміра, отъ 30 минувшаго декабря за № 2183, проситъ меня увѣдомить, нѣтъ ли препятствій къ перемѣщенію г. Хронщевскаго на должность ординарнаго профессора въ университетъ св. Владиміра и, если не встрѣтится, препроводить формулярный списокъ о службѣ г. Хронщевскаго.

Увѣдомляя ваше превосходительство о вышеизложенномъ, покорнѣйше прошу доставить мнѣ испрашиваемыя свѣдѣнія и формулярный списокъ о службѣ г. Хронщевскаго».

При этомъ проф. Бекетовъ заявилъ слѣдующее: «По поводу чувствительной для нашего университета утраты учебной силы въ лицѣ профессора Хронщевскаго, я считаю своею обязанностью не только выразить предъ совѣтомъ свое сожалѣніе, но и напомнить ему ученыя и учебныя заслуги профессора. Ученые труды г. Хронщевскаго за границею обратили на него особенное вниманіе людей науки; многіе изъ нихъ, а въ томъ числѣ и знаменитый берлинскій профессоръ Вирховъ, дали объ немъ самые блистательные отзывы. Достаточно привести слова послѣдняго: «Докторъ Хронщевскій изъ Казани, въ продол-

женіи двухъ послѣднихъ семестровъ, весьма усердно посѣщалъ мои лекціи, равно какъ и демонстративный курсъ. Сверхъ того онъ почти цѣлый день неутомимо работалъ въ патологическомъ институтѣ. Его изслѣдованія о строеніи легкихъ, почекъ, печени и другихъ важныхъ органовъ обнаруживаютъ такую тщательность, осмотрительность и самостоятельность, что едва-ли можно ставить съ ними въ параллель какое-нибудь подобное изслѣдованіе; и результаты, полученные имъ, отличаются такою вѣрностью, что ими рѣшены нѣкоторые изъ важныхъ анатомическихъ вопросовъ. Я знаю мало молодыхъ медиковъ, которые могутъ сравниться съ г. Хронщевскимъ относительно прилежанія, неутомимости и правильнаго взгляда, и потому я его считаю въ-особенности способнымъ занять мѣсто наставника и руководителя молодаго поколѣнія».

Медицинскій факультетъ, знакомый съ этими трудами и руководствуясь отзывомъ профессора Лямбля, два раза единогласно избиралъ г. Хронщевскаго сначала доцентомъ, потомъ и экстра-ординарнымъ профессоромъ на новую, можно сказать для него устроенную, каѳедру гистологіи.

Послѣ такой замѣчательной предшествующей научной дѣятельности и такого пріема, оправдалъ ли профессоръ Хронщевскій ожиданія университета? Дѣятельность его легко можетъ быть прослѣжена по печатнымъ статьямъ и отчетамъ. До поступленія въ университетъ имъ было издано пять сочиненій; въ немногіе же годы его пребыванія въ Харьковѣ имъ уже напечатаны 8 работъ. Профессоръ Хронщевскій основалъ здѣсь гистологическій институтъ, гдѣ подъ его руководствомъ постоянно занимаются многіе молодые люди, какъ студенты, такъ и окончившіе курсъ медики, спеціальными изслѣдованіями. Результаты этихъ работъ учениковъ г. Хронщевскаго уже напечатаны въ числѣ 12 статей; совѣту извѣстно, что еще недавно двѣ изъ нихъ удостоены премій отъ университета. Все это

достаточно показываетъ, что проф. Хронщевскій, поступивъ въ университетъ, не только не утратилъ своей любви и преданности къ занятіямъ, но съ новою энергіею принялся за научные труды и возбудилъ въ своихъ слушателяхъ ту-же любовь къ занятіямъ и основалъ здѣсь, можно сказать, цѣлую школу молодыхъ гистологовъ. Однимъ словомъ, ученая и педагогическая дѣятельность проф. Хронщевскаго, какъ видно, была въ высшей степени плодотворна, и потому, я думаю, слѣдуетъ признать, что онъ не только вполнѣ оправдалъ ожиданія университета, но скорѣе превзошелъ ихъ. — Все сказанное даетъ мнѣ основаніе выразить предъ совѣтомъ сожалѣніе о томъ, что проф. Хронщевскій переходитъ въ другой университетъ, а нашъ теряетъ въ немъ одного изъ лучшихъ своихъ дѣятелей».

Гг. члены совѣта: Гарничъ-Гарницкій, Лазаревичъ, Федоренко, Добротворскій, Щелковъ и ректоръ выразили и съ своей стороны сожалѣніе о томъ, что харьковскій университетъ теряетъ въ лицѣ проф. Хронщевскаго достойнаго ученаго и преподавателя.

Опр. Донести г. попечителю, что со стороны харьковскаго университета нѣтъ препятствій къ перемѣщенію проф. Хронщевскаго въ университетъ св. Владиміра.

Ст. 5. Отъ 11 января за № 73, въ коемъ г. попечитель увѣдомляетъ, что Государь Императоръ по всеподданнѣйшему докладу г. министра народнаго просвѣщенія Всемилостивѣйше соизволилъ пожаловать кавалерами ордена св. Владиміра 3 ст. гг. профессоровъ *Лавровскаго 1-го* и *Лавровскаго 2-го*. — *Опр.* Отмѣтить о семъ въ формулярныхъ спискахъ гг. профессоровъ Лавровскаго 1-го и Лавровскаго 2-го.

Ст. 6. Отъ 11 января за № 75, о разрѣшеніи допустить кандидата Михаила *Григоревскаго* къ чтенію лекцій, въ качествѣ приватъ-доцента, по предмету греческаго языка. При этомъ доложено, что, на основаніи означеннаго предложенія, ис-

торико-филологическій факультетъ ходатайствуетъ о порученіи г. Григоревскому обязательнаго курса по означенному предмету.—*Опр.* Утвердить предположеніе историко-филологическаго факультета.

Ст. 7. Отъ 11 января за № 76, объ утвержденіи *И. Г. Бецкаго* въ званіи почетнаго члена университета.—*Опр.* Изготовивъ г. Бецкому дипломъ на означенное званіе, препроводить ему оный отъ имени совѣта.

Ст. 8. Отъ 14 января за № 86, объ увольненіи лаборанта при зоотомической лабораторіи магистра *Ганина* отъ означенной должности и объ опредѣленіи на оную кандидата по отдѣленію естественныхъ наукъ Василія *Ярошевскаго.—Опр.* Сообщить о семъ въ правленіе и физико-математическій факультетъ.

Ст. 9. Отъ 24 декабря за № 3636, о перечисленіи изъ кредита канцеляріи кавказскаго комитета въ вѣденіе харьковскаго университета суммы на содержаніе кавказскихъ стипендіатовъ.—*Опр.* Сообщить о семъ въ правленіе университета.

Ст. 10. Отъ 30 ноября и 31 декабря за №№ 3404 и 3686, съ увѣдомленіемъ, что ординаторы *Дудукаловъ* и *Костенко* оставлены безъ производства въ чины, такъ-какъ нѣтъ указанія въ законѣ, что занимаемой ими должности присвоенъ чинъ IX класса.—*Опр.* Ожидать разрѣшенія возбужденнаго совѣтомъ въ 1865 году вопроса о служебныхъ правахъ ординаторовъ клиникъ.

Ст. 11. Отъ 4 января за № 12, объ исключеніи удостоенныхъ медицинскимъ факультетомъ званія аптекарскаго помощника Людвига и Франца *Новицкихъ* изъ податнаго званія подлежащею казенною палатою.—*Опр.* Выдать гг. Новицкимъ установленныя свидѣтельства на званіе аптекарскаго помощника.

Ст. 12. Отъ 11 января за № 74, г. попечитель увѣдомляетъ, что онъ считаетъ себя не въ-правѣ перемѣстить пол-

коваго лѣкаря войска донскаго *Соколова* на должность ординатора на два года, такъ-какъ по смыслу университет. устава должность эта не установлена срочною, а должна считаться, на основаніи общихъ законовъ о службѣ (т. III св. зак. уст. о служ.), безсрочною. При этомъ г. ректоръ заявилъ, что г. Соколовъ по приглашенію директора терапевтической клиники исполнялъ обязанности ординатора съ 13 октября прошлаго года, а потому не признаетъ ли совѣтъ возможнымъ назначить ему вознагражденіе за этотъ трудъ изъ спеціальныхъ средствъ университета въ размѣрѣ 120 р. сер.—*Опр.* 1) Сообщить г. наказному атаману войска донскаго о причинѣ не состоявшагося перемѣщенія г. Соколова. 2) Разрѣшивъ выдать г. Соколову вознагражденіе изъ спеціальныхъ средствъ университета въ размѣрѣ 120 р. сер., просить правленіе сдѣлать по этому предмету надлежащее распоряженіе.

Ст. 13. Отъ 14 декабря на имя г. ректора за № 3543, при которомъ препровождена вся переписка по дѣлу объ увольненіи проф. Маровскаго отъ службы.

При этомъ доложено было о томъ, что протоколы совѣтскихъ засѣданій по означенному дѣлу октября 24, 27 и 31 и ноября 24 прошлаго 1867 года и 31 мая 1868 года предназначены совѣтомъ къ напечатанію, но исполненіе этого постановленія, по распоряженію г. попечителя, на основаніи § 47 устава, пріостановлено до окончательнаго рѣшенія этого дѣла.

При этомъ возбужденъ былъ вопросъ о томъ, слѣдуетъ ли напечатать и все вышеозначенное дѣлопроизводство, который и рѣшенъ большинствомъ голосовъ (20 противъ 2) утвердительно.—*Опр.* 1) Согласно вышеизложенному рѣшенію совѣта напечатать означенные протоколы совѣтскихъ засѣданій по дѣлу проф. Маровскаго. 2) Что-же касается напечатанія всего дѣлопроизводства, на которое, по приблизительному разсчету, потребуется отъ 800 р. до 1000 р., то объ изысканіи средствъ

на это напечатаніе войдти въ сужденіе въ одно изъ слѣдующихъ засѣданій совѣта[1].

Ст. 14. Отъ 23 декабря за № 3618, съ возвращеніемъ журнала совѣтскихъ засѣданій 3 истекшаго декабря, при чемъ г. попечитель увѣдомилъ совѣтъ, что постановленія, изъясненныя въ статьяхъ 1-й и 17-й, онъ находитъ противными 79 пункт. правилъ о назначеніи денежныхъ выдачъ по министерству народнаго просвѣщенія.—*Опр.* Донести г. попечителю, что при постановленіи рѣшеній, внесенныхъ въ журналъ совѣта 3 декабря (ст. 1 и 17), совѣтъ руководствовался слѣдующими соображеніями: по ст. 79 правилъ о назначеніи денежныхъ выдачъ по министерству народнаго просвѣщенія, производство изъ спеціальныхъ суммъ жалованья, квартирныхъ денегъ и другихъ постоянныхъ выдачъ чиновникамъ, сверхъ штатнаго назначенія, дозволяется неиначе, какъ съ утвержденія г. министра народнаго просвѣщенія. Въ настоящемъ случаѣ совѣтъ, дѣлая постановленіе (ст. 17) о порученіи преподаванія минералогіи для студентовъ медицинскаго факультета во второмъ полугодіи $18^{68}/_{69}$ акад. года приватъ-доценту Бріо, опредѣлилъ ему, на основаніи § 74 устава, вознагражденіе за этотъ трудъ не въ видѣ жалованья, или постоянной выдачи, а какъ плату за занятія его въ семъ только полугодіи. На томъ-же основаніи назначено совѣтомъ (ст. 1) вознагражденіе приватъ-доценту Гаттен-

[1] Въ засѣданіи 6 мая, при обсужденіи этого дѣла, совѣтъ университета, найдя неудобнымъ печатать упомянутые протоколы прежде напечатанія самаго дѣлопроизводства и отдѣльно отъ онаго, постановилъ: войдти въ сужденіе о напечатаніи какъ означенныхъ протоколовъ, такъ и всего производства по этому дѣлу въ концѣ настоящаго 1869 года, когда, по поступленіи ожидаемаго по смѣтѣ сбора за слушаніе лекцій со студентовъ и за покрытіемъ относимыхъ на этотъ источникъ расходовъ, можно будетъ сдѣлать болѣе вѣрное соображеніе о размѣрѣ спеціальныхъ средствъ, которыми университетъ можетъ располагать въ текущемъ году.

бергеру за преподаваніе по вакантной каѳедрѣ полицейскаго права, которое поручено ему на текущій академическій годъ. Что же касается до опредѣленія совѣта выдавать г. Гаттенбергеру опредѣленную ему въ вознагражденіе сумму, по-мѣсячно, въ теченіи второй половины акад. года, то это опредѣленіе не противорѣчитъ университетскому уставу, который не требуетъ, чтобы вознагражденіе выдавалось приватъ-доцентамъ за одинъ разъ по окончаніи года. Въ настоящемъ же случаѣ, какъ и вообще при порученіи приватъ-доцентамъ преподаванія по вакантнымъ каѳедрамъ, помѣсячная выдача этого вознагражденія вызывается неизбѣжною необходимостью. Добросовѣстное преподаваніе одного изъ главныхъ факультетскихъ предметовъ требуетъ отъ молодаго человѣка, начинающаго профессорскую дѣятельность, труда тяжелаго, который не можетъ не поглощать все его время. По этому положеніе приватъ-доцента, неимѣющаго собственныхъ средствъ къ жизни, обязаннаго работать цѣлый годъ безъ всякаго содержанія, было бы весьма печально, и это конечно не могло бы служить поощреніемъ къ развитію института приватъ-доцентовъ, начинающаго приносить въ харьковскомъ университетѣ свои полезные результаты и являющагося часто единственнымъ рессурсомъ для замѣщенія вакантныхъ каѳедръ, въ-особенности по юридическому факультету. На основаніи вышеизложеннаго, войдти къ г. попечителю съ новымъ представленіемъ по предмету рѣшеній, состоявшихся въ засѣданіи совѣта 3 декабря 1868 года (ст. 1 и 17), и просить его превосходительство, если имъ признано будетъ нужнымъ, испросить на приведеніе оныхъ въ исполненіе разрѣшенія г. министра народнаго просвѣщенія.

b) Представленія факультетовъ.

Ст. 15. Физико-математическій факультетъ, отъ 13 января за № 2, доноситъ о томъ, что приготовленная проф. *Ле-*

ваковскимъ, для произнесенія на торжественномъ актѣ, рѣчь «О способѣ образованія рѣчныхъ долинъ на югѣ Россіи» разсмотрѣна и одобрена факультетомъ. — *Опр.* Предоставить проф. Леваковскому произнести означенную рѣчь на имѣющемъ быть торжественномъ собраніи университета 17 сего января.

Ст. 16, 17 и 18. Представленія факультетовъ съ ходатайствомъ о напечатаніи въ приложеніяхъ къ протоколамъ совѣтскихъ засѣданій: физико-математическаго — диссертація кандидата *Радкевича* — «О круглыхъ червяхъ, паразитирующихъ въ пищеварительномъ каналѣ таракана»; юридическаго — диссертація стипендіата *Алексѣенка* — «Взглядъ на постепенный ходъ ученія о налогѣ у экономистовъ — А. Смита, Ж. Б. Сея, Рикардо, Сисмонди, Д. С. Милля»; медицинскаго — «Извѣстія о диспутѣ лѣкаря *Котелевскаго* на степень доктора медицины». — *Опр.* Напечатать означенныя статьи въ приложеніяхъ къ протоколамъ совѣтскихъ засѣданій.

Ст. 19. Физико-математическаго, отъ 13 января за № 4: Проф. *Шитра 2-й* вошелъ въ факультетъ съ рапортомъ слѣдующаго содержанія:

«Въ 1859 году былъ изданъ заслуженнымъ профессоромъ, нынѣ почетнымъ членомъ университета, В. М. Черняевымъ «Конспектъ растеній, дикорастущихъ и разводимыхъ въ окрестностяхъ Харькова и въ Украйнѣ». Но такъ-какъ это изданіе напечатано въ небольшомъ числѣ экземпляровъ, то въ настоящее время его нельзя пріобрѣсти: оно сдѣлалось рѣдкостью. Поэтому проф. Черняевъ выразилъ мнѣ желаніе испросить у совѣта университета разрѣшеніе о напечатаніи упомянутаго конспекта на казенный счетъ вторымъ изданіемъ, при чемъ были бы сдѣланы авторомъ значительныя прибавленія къ первому изданію.

Я съ своей стороны долженъ при этомъ сказать, что считаю конспектъ проф. Черняева весьма полезнымъ не только для спе-

ціалистовъ-ботаниковъ, но и для студентовъ, какъ учебное пособіе при изученіи нашихъ растеній. Весьма многимъ извѣстно глубокое знаніе проф. Черняева украинской флоры, поэтому о достоинствахъ конспекта я считаю излишнимъ упоминать; прибавленія, которыя появились бы въ новомъ изданіи, были бы очень интересны для каждаго изучающаго нашу флору и растительность Россіи вообще.

На изложенныхъ основаніяхъ я обращаюсь къ факультету съ просьбой объ его содѣйствіи этому дѣлу ».

По выслушаніи рапорта профессора Питра, физико-математическій факультетъ положилъ ходатайствовать предъ совѣтомъ о напечатаніи конспекта растеній, составленнаго почетнымъ членомъ университета В. М. Черняевымъ, въ прибавленіяхъ къ протоколамъ совѣтскихъ засѣданій.

Опр. Напечатать означенный конспектъ въ приложеніяхъ къ протоколамъ засѣданій совѣта.

Ст. 20. Физико-математическій факультетъ, отъ 13 января за № 3, доноситъ совѣту о томъ, что кандидатъ *Богуславскій* исполнилъ требованія, изъясненныя въ §§ 32, 33 и 34 положенія о педагогическихъ курсахъ, для полученія званія учителя гимназіи. — *Опр.* Выдать г. Богуславскому надлежащее удостовѣреніе.

с) Докладъ по другимъ дѣламъ.

Ст. 21. Согласно опредѣленію совѣта 20 истекшаго декабря, произведено было баллотированіе доктора физики, доцента *Шимкова*, въ званіе экстра-ординарнаго профессора по занимаемой имъ каѳедрѣ физики, при чемъ оказалось избират. — 23 и неизбират. — 1 баллъ. — *Опр.* Просить ходатайства г. попечителя объ утвержденіи г. Шимкова въ означенномъ званіи.

Ст. 22, 23 и 24. Согласно опредѣленію совѣта 20 истекшаго декабря, произведено было рѣшеніе, посредствомъ закры-

той подачи голосовъ, вопросовъ: о командированіи проф. *Станкевича* и доцента *Ковальскаго* за границу съ ученою цѣлію и объ оставленіи кандидата *Лукьяновскаго*, обязаннаго службой въ учительскомъ званіи въ западной Россіи, стипендіатомъ при университетѣ для приготовленія къ профессорскому званію по предмету практической механики, при чемъ оказалось: у г. Станкевича — утвердительныхъ 20 и отрицательныхъ 3 голоса, у Ковальскаго — утверд. — 24 (единогласно) и у Лукьяновскаго — утверд. — 17 и отрицат. — 7 голосовъ. — *Опр.* 1) Просить ходатайства г. попечителя о командированіи гг. Станкевича и Ковальскаго за границу съ ученою цѣлію; 2) войдти съ представленіемъ объ освобожденіи г. Лукьяновскаго отъ обязательной службы въ западной Россіи.

Ст. 25 и 26. Доложены были: 1) списокъ бывшихъ студентовъ, принятыхъ вновь въ университетъ въ тѣ курсы, изъ которыхъ они выбыли, и 2) вѣдомость объ университетскихъ суммахъ за ноябрь мѣсяцъ прошлаго года. — *Опр.* Принять къ свѣдѣнію.

Ст. 27. Г. ректоръ университета заявилъ, что 1) помощникъ библіотекаря *Засядко 1-й*, кромѣ прямыхъ своихъ обязанностей по должности помощника библіотекаря, съ усердіемъ, въ теченіи истекшаго года, несъ безмездно возложенную на него совѣтомъ обязанность по управленію университетскою типографіею, которой валовой доходъ въ прошломъ году простирался до 5417 р. $57^3/_4$ коп.; 2) приватъ-доцентъ докторъ медицины *Киселевъ* въ теченіи прошлаго 1868 года, во время болѣзни и заграничнаго отпуска врача при университетѣ Лангъ, исправлялъ эту должность болѣе шести мѣсяцевъ безъ всякаго вознагражденія; 3) завѣдующій маньковскимъ электро-терапевтическимъ заведеніемъ доцентъ Сыцянко ходатайствуетъ о выдачѣ нижнему служителю *Костенку* въ награду за его усердную службу 8 р. сер. изъ суммы, ассигнованной на содержа-

ніе упомянутаго заведенія по статьѣ на непредвидѣнные расходы; 4) бывшій канцелярскій чиновникъ при университетѣ *Трипольскій*, оставленный въ 1865 году за штатомъ, находясь въ бѣдности, проситъ о пособіи по уваженію къ 17-лѣтней усердной службѣ его при университетѣ.

Опр. По надлежащемъ обсужденіи заявленія г. ректора совѣтъ постановилъ: въ вознагражденіе трудовъ г. Засядко, по управленію типографіей въ истекшемъ году, и приватъ-доцента Киселева, за исправленіе должности врача при университетѣ, ассигновать къ выдачѣ изъ спеціальныхъ средствъ университета первому 541 р. 76 к., что составитъ 10% изъ валоваго дохода типографіи, и второму — 300 р. сер. Кромѣ того, назначить изъ того-же источника для выдачи пособія бывшему канцелярскому чиновнику Трипольскому 100 руб. сер. и нижнему служителю при маньковскомъ заведеніи Костенку въ награду за усердную службу 8 р. сер. О вышеизложенномъ постановленіи совѣта сообщить въ правленіе для зависящаго распоряженія, по испрошеніи, на основаніи § 51 университетскаго устава, разрѣшенія г. попечителя на эту выдачу.

Ст. 28. Отношеніе правленія, отъ 2 января за № 2, съ препровожденіемъ копіи съ донесенія физико-математическаго факультета объ отмѣткахъ, полученныхъ на полугодовыхъ испытаніяхъ принадлежащими къ сему факультету стипендіатами казны. — *Опр.* Принять къ свѣдѣнію.

Ст. 29. Отношеніе редакціи московскихъ университетскихъ извѣстій съ просьбою о высылкѣ оной протоколовъ совѣтскихъ засѣданій, въ обмѣнъ на московскія университетскія извѣстія. — *Опр.* Сообщить въ правленіе для зависящаго распоряженія къ удовлетворенію желанія редакціи.

Ст. 30. Доложенъ былъ отчетъ о состояніи и дѣятельности харьковскаго университета за 1868 годъ, составленный по установленной министерствомъ формѣ, и извлеченіе изъ этого отче-

та, предназначенное для прочтенія въ имѣющемъ быть 17 января торжественномъ собраніи университета. — *Опр.* Полный отчетъ представить г. попечителю, а извлеченіе изъ онаго, по прочтеніи на актѣ, напечатать на счетъ университета.

Ст. 31. Отношеніе совѣта с.-петербургскаго университета, съ препровожденіемъ для библіотеки университета 5 названій разныхъ сочиненій. — *Опр.* Изъявить благодарность совѣта за сдѣланное приношеніе.

Ст. 32. Доложена была составленная правленіемъ университета смѣта доходовъ и расходовъ спеціальныхъ средствъ университета на 1869 годъ. По надлежащемъ обсужденіи каждой статьи означенной смѣты, совѣтъ утвердилъ оную въ слѣдующемъ видѣ:

ДОХОДЪ.

А. Процентовъ съ пожертвованныхъ капиталовъ:

1. Съ капитала въ 251 р., пожертвованнаго разными лицами въ пользу университетской церкви и помѣщеннаго въ государственномъ банкѣ (изъ 3%) 7 р. 53 к. и остатокъ отъ 1868 года 21 р. 81 к., всего . . . . . 29 р. 34 к.

2. Съ капитала въ 9322 р., пожертвованнаго коллежскимъ совѣтникомъ Порпурою на содержаніе изъ процентовъ двухъ стипендіатовъ его имени въ харьковскомъ университетѣ, въ 4% непрерывно-доходныхъ билетахъ, 372 р. 88 к.; съ 600 р., въ 5% государственнаго банка билетахъ, образовавшихся отъ процентовъ на капиталъ — 30 р.; всего 402 р. 88 к. и остатокъ отъ процентовъ на означенный капиталъ 187 р. 53½ к., всего . . . . 590 р. 41½ к.

На поминовеніе бывшаго профессора Осиповскаго	5 р. —
На содержаніе двухъ стипендіатовъ Порпуры и приращеніе капитала . . .	590 р. 41½ к.
На содержаніе въ харьковской гимназіи двухъ стипендіатовъ и приращеніе капитала Захаржевскаго	1077 р. 87½ к.
На содержаніе одного стипендіата Мамонтова и приращеніе капитала . . .	443 р. 5 к.
На содержаніе стипендіата статскаго совѣтника Тарасова и приращеніе капитала	629 р. 52 к.
Присоединяется къ церковному капиталу	29 р. 34 к.
На содержаніе маньковскаго заведенія 850 р., на непредвидимые расходы и приращеніе капитала 624 р. 20¼ к., всего	1474 р. 20¼ к.
На содержаніе типографіи и вознагражденіе управляющаго 10% съ валоваго дохода.	5461 р. 11½ к.
2% вычетъ изъ суммы, собираемой за слушаніе лекцій, для отсылки въ министерство народнаго просвѣщенія . . .	252 р. 21 к.

На жалованье и плату сверхъ штатнаго положенія:

На плату сверхштатному помощнику лаборанта при химической лабораторіи .		500 р.
Приватъ-доцентамъ:	Цитовичу . . .	1000 р.
	Владимірову . .	1000 р.
	Киселеву . . .	750 р.
	Левандовскому .	750 р.
	Григоревскому .	750 р.

Гаттенбергеру .	1000 р.
Алексѣеву . .	1000 р.
Рабочему при физическомъ кабинетѣ .	300 р.
Квартирныя деньги секретарю по студентскимъ дѣламъ Рейнике	200 р.
Квартирныя деньги 4 фельдшерамъ при клиникахъ.	480 р.
Разъѣздныхъ врачу студентовъ . .	300 р.
На хирургическіе инструменты для клиническихъ отдѣленій при больницѣ богоугодныхъ заведеній	100 р.
На плату за помѣщеніе для метеорологической обсерваторіи	50 р.
На командированіе депутата на имѣющій быть, 16 марта, съѣздъ русскаго археологическаго общества въ Москвѣ. .	300 р.
На пособіе доценту Ковальскому для предполагаемой командировки его за границу на одинъ годъ	1000 р.
На командированіе проф. Питра 2-го въ С.-Петербургъ для присутствованія на между народной выставкѣ россійскаго общества садоводства и съѣздѣ ботаниковъ въ С.-Петербургѣ.	350 р.
На командированіе проф. Бекетова въ С.-Петербургъ для присутствованія на торжествѣ 50-лѣтняго юбилея с.-петербургскаго университета.	350 р.
На вознагражденіе профессоровъ физико-математическаго факультета за преподаваніе въ медицинскомъ факультетѣ естественныхъ наукъ	1200 р.

На учебныя потребности по факультетамъ:

По медицинскому факультету:

На демонстративное преподаваніе токсикологіи	200 р.
На гистологическій кабинетъ для фотомикрографіи	50 р
На покупку вещей и препаратовъ, необходимыхъ для преподаванія эмбріологіи	300 р.
Для гистологическаго кабинета на пріобрѣтеніе вещей, необходимыхъ для микрофотографіи	100 р.
Проф. Станкевичу для поѣздки за границу	300 р.
На заграничную корреспонденцію.	100 р.
На напечатаніе объявленій о конкурсахъ и проч. отъ университета . . .	75 р.
На разные расходы по усмотрѣнію совѣта университета, на основаніи §§ 42 и 109 университетскаго устава	2923 р. 23½ к.
А всего	25855 р. 88¼ к.

Опр. Вышеприведенную смѣту спеціальныхъ доходовъ и расходовъ университета принять къ руководству, на 1869 годъ, сообщивъ копію съ оной въ правленіе университета.

Ст. 33—41. Доложены были счеты, по которымъ слѣдуетъ уплатить: *Скабичевскому* 309 р. 29 к., *Павлову*, *Рудакову*, *Огненкову*, *Ванену*, *Жевержееву* и *Миронову* 341 р. 88½ к. — изъ клинической суммы; *Теодору* 20 р. — изъ суммы физіологическаго кабинета; *Дейбнеру* 9 р. 83 к. — изъ суммы технологическаго кабинета; *Лещенкѣ* 36 р. — изъ суммы музея физіологической анатоміи; *Нечипоренкѣ* 323 р. 92 к. — изъ суммы, назначенной для занятій студентовъ медицинскаго факуль-

тета химіей; *Гультірену* 115 р. — изъ суммы астрономическаго кабинета; *Кучину* 44 р. и *Андрушкевичу* 116 р. 50 к. — изъ суммы гистологическаго кабинета. — *Опр.* Разрѣшивъ произвести означенные расходы изъ указанныхъ источниковъ, просить правленіе сдѣлать по этому предмету надлежащее распоряженіе.

Засѣданіе 28 января.

Присутствовали, подъ предсѣдательствомъ г. заступающаго мѣсто ректора, 19 членовъ. Не присутствовали: ректоръ университета В. А. Кочетовъ, проф.: Рославскій-Петровскій, Лавровскій 2-й, Бекетовъ, Бейеръ, Петровъ, Федоренко, Станкевичъ и Питра 1-й.

Доложены были представленія факультетовъ: физико-математическаго и юридическаго о назначеніи вознагражденія за преподаваніе въ январѣ сего года приватъ-доцентамъ: *Алексѣеву*, *Владимірову* и *Цитовичу*, по 83 р. 33 к. каждому, и приватъ-доценту *Гаттенбергеру*, за преподаваніе съ 22 ноября по конецъ января, 191 р. 69 коп. — *Опр.* Разрѣшивъ употребить на вознагражденіе вышеупомянутыхъ приватъ-доцентовъ, согласно приведенному разсчету, 441 р. 68 к., изъ спеціальныхъ средствъ университета, просить правленіе сдѣлать надлежащее распоряженіе по этому предмету.

II.

ПРИЛОЖЕНІЯ.

ИЗВЛЕЧЕНІЕ ИЗЪ ОТЧЕТА

О СОСТОЯНІИ И ДѢЯТЕЛЬНОСТИ

ИМПЕРАТОРСКАГО ХАРЬКОВСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

ЗА 1868 ГОДЪ.

Въ истекшемъ году въ личномъ составѣ университета произошли слѣдующія перемѣны:

Умерли почетные члены университета: тайный совѣтникъ *Дубовицкій* и докторъ правъ *Праттъ* въ Лондонѣ.

Вновь избраны въ почетные члены: проф. гиссенскаго университета *Лейкартъ* и проф. падуанскаго университета *Брунетти*.

Деканъ физико-математическаго факультета орд. проф. *Чернай* утвержденъ заступающимъ мѣсто ректора университета, за увольненіемъ, по прошенію, отъ исполненія этой обязанности бывшаго декана юридическаго факультета орд. проф. *Станиславскаго*; по увольненіи же сего послѣдняго отъ службы, за выслугою 25-лѣтняго срока, заслуженный орд. проф. *Палюмбецкій* утвержденъ въ должности декана юридическаго факультета. Орд. проф. *Лавровскій 1-й* утвержденъ деканомъ историко-филологическаго факультета, по увольненіи отъ этой должности, по прошенію, орд. проф. *Рославскаго-Петровскаго*.

Заслуженный орд. проф. *Палюмбецкій* оставленъ на службѣ по 20 сентября 1871 года; исправл. должн. орд. проф. *Бейеръ*, по утвержденіи его въ этомъ званіи, оставленъ на службѣ на 5 лѣтъ со дня выслуги имъ 25-лѣтняго срока.

Доценты *Надлеръ* и *Вагнеръ* утверждены въ званіи экстраординарнаго профессора.

Доцентъ *Неймисовъ* перемѣщенъ на должность окружнаго инспектора с.-петербургскаго учебнаго округа.

Уволены отъ службы: за выслугою сроковъ — орд. проф. *Борисякъ* и *Станиславскій*—оба съ званіемъ заслуженнаго профессора; — по прошеніямъ: экстра-орд. проф. *Маровскій*, помощникъ прозектора *Заксъ* и ординаторы факультетскихъ клиникъ: *Герценвицъ* и *Дудукаловъ*.

Вновь опредѣлены: изъ отставныхъ, заслуженный проф. *Деллен*ъ — орд. профессоромъ по каѳедрѣ римской словесности; магистръ *Яцуковичъ*, по конкурсу, доцентомъ, съ порученіемъ ему каѳедры технической химіи; докторъ медицины *Залѣсскій* — доцентомъ по медицинскому факультету; магистръ *Бріо* — доцентомъ съ порученіемъ ему каѳедры минералогіи; лѣкаря: *Скабичевскій*—помощникомъ прозектора и *Красновъ* — ординаторомъ факультетской хирургической клиники; кандидатъ *Ярошевскій*—лаборантомъ зоотомической лабораторіи, на мѣсто уволеннаго отъ этой должности, за откомандированіемъ за границу, магистра *Ганина;* колл. секр. *Вольнеръ*—помощникомъ инспектора студентовъ, на мѣсто умершаго колл. асс. *Журавлева*. Художникъ *Киселевъ* допущенъ къ исполненію обязанностей хранителя музея изящныхъ искусствъ.

Допущены къ преподаванію въ качествѣ приватъ-доцентовъ: кандидатъ историко-филологическаго факультета *Григоревскій*, кандидатъ юридическаго факультета *Гаттенбергеръ* и доктора медицины — *Гиршманъ*, *Дудукаловъ*, *Котелевскій* и *Кузнецовъ*.

Въ теченіи 1868 года удостоены Высочайшихъ наградъ: орденами св. Владиміра 3-й степени — деканъ историко-филологическаго факультета *Лавровскій 1-й* и орд. проф. того-же факультета *Лавровскій 2-й*; св. Анны 2-й ст. — деканъ медицинскаго факультета *Щелковъ* и орд. проф. *Левашовскій* и *Питра 1-й*; св Станислава 2-й ст. съ Императорскою короною, секретарь совѣта *Кожедубовъ*; св. Станислава 2-й ст., врачъ при университетѣ *Лангъ*. Профессоръ богословія протоіерей *Добротворскій* награжденъ отъ св. сунода наперснымъ крестомъ.

Изъ числа каѳедръ, положенныхъ въ харьковскомъ университетѣ уставомъ 1835 года и послѣдующими до 1863 г. постановленіями, къ 1 января 1869 года состоятъ незамѣщенными: по историко-филологическому факультету каѳедры философіи и греческой словесности; по физико-математическому — механики; по юридическому — энциклопедіи законовѣдѣнія, римскаго права, гражданскаго права, полицейскаго права, финансоваго права; по медицинскому — терапевтической клиники.

Для замѣщенія вакантныхъ каѳедръ въ прошломъ 1868 г. сдѣлано объявленіе конкурсовъ: по каѳедрѣ греческой словесности (съ назначеніемъ срока 1 мая 1869 г.), финансоваго права (срокъ 15 апрѣля 1868 г.) и римскаго права (срокъ 15 августа 1868 г.). Послѣдніе оба остались безъ послѣдствій. По конкурсу, объявленному въ 1867 году, магистръ *Яцуковичъ* опредѣленъ на должность доцента съ порученіемъ ему каѳедры технической химіи. Для замѣщенія каѳедры частной патологіи и терапіи избранъ совѣтомъ и утвержденъ въ должности доцента докторъ медицины *Кремянскій*.

Для преподаванія по вакантнымъ и другимъ каѳедрамъ состоитъ при университетѣ 11 приватъ-доцентовъ, а для приготовленія къ профессорскому званію по разнымъ каѳедрамъ 8 стипендіатовъ.

Изъ числа предметовъ преподаванія по факультетамъ, для которыхъ существуютъ каѳедры въ харьковскомъ университетѣ, въ $18^{67}/_{68}$ акад. году не было чтенія лекцій по философіи съ педагогіей, за неимѣніемъ особаго преподавателя для этого предмета. По остальнымъ каѳедрамъ, остававшимся вакантными въ теченіи года, преподаваніе поручаемо было частію наличнымъ штатнымъ преподавателямъ, частію приватъ-доцентамъ и постороннимъ лицамъ, а именно: съ Высочайшаго соизволенія преподаваніе римскаго права возложено было на проф. энциклопедіи законовѣдѣнія *Станиславскаго;* финансоваго права—на приватъ-доцента кандидата *Стельмаховича;* гражданскаго права — на приватъ-доцента кандидата *Цитовича;* римской словесности— на бывшаго профессора сего университета *Тихоновича* и приватъ-доцента кандидата *Левандовскаго;* технической химіи — на экстра-орд. профессора химіи *Гарничъ-Гарницкаго;* аналитической механики—на приватъ-доцента кандидата *Алексѣева;* спеціальной патологіи и терапіи — на орд. профессора фармакологіи и общей терапіи *Станкевича.*

На $18^{68}/_{69}$ акад. годъ сдѣлано слѣдующее распоряженіе въ отношеніи къ преподаванію предметовъ по вакантнымъ каѳедрамъ: преподаваніе греческой словесности возложено на засл. орд. проф. *Деллена;* энциклопедіи законовѣдѣнія, русскаго государственнаго права и римскаго права, съ Высочайшаго соизволенія,—на заслуженнаго проф. *Станиславскаго;* финансоваго права—на испр. д. орд. проф. по каѳедрѣ политической экономіи *Сокальскаго;* полицейскаго права—на приватъ-доцента *Гаттенбергера:* гражданскаго права—на приватъ-доцента *Цитовича;* механики—на приватъ-доцента *Алексѣева.*

Въ составѣ преподаванія по факультетамъ въ истекшемъ году сдѣланы слѣдующія измѣненія: въ физико-математическомъ факультетѣ — опытная физика, входившая въ число предметовъ преподаванія только въ отдѣленіи физико-химическихъ наукъ, ввe-

дена въ число главныхъ предметовъ по отдѣленіямъ математическихъ и естественныхъ наукъ. Въ медицинскомъ факультетѣ учреждена особая доцентура при каѳедрѣ судебной медицины для отдѣльнаго преподаванія токсикологіи. Преподаваніе церковной исторіи въ историко-филологическомъ факультетѣ и церковнаго права въ юридическомъ, которое возложено было до сего времени на профессора по каѳедрѣ богословія, пріостановлено впредь до опредѣленія особыхъ преподавателей по этимъ предметамъ.

Независимо отъ факультетскаго преподаванія, въ теченіи $18^{68}/_{69}$ академическаго года читаны въ университетѣ безплатные публичные курсы: химіи — орд. проф. *Бекетовымъ*, технической химіи — доцентомъ *Яцуковичемъ*, практической механики — приватъ-доцентомъ *Алексѣевымъ*. Курсы эти, каждый по два часа въ недѣлю, начинаются съ 1 окт. и оканчиваются къ 1 апрѣля.

2 февраля истекшаго года, въ день юбилея И. А. Крылова, въ актовомъ залѣ университета происходило публичное чтеніе проф. *Лавровскимъ 1-мъ* «о Крыловѣ и его литературной дѣятельности».

Въ февралѣ и мартѣ того-же года прочитаны были въ актовомъ залѣ университета, въ пользу народныхъ школъ харьковскаго уѣзда, 8 публичныхъ лекцій слѣдующими лицами: приватъ-доцентомъ *Алексѣевымъ* — «объ электромагнитныхъ двигателяхъ», экстра-орд. профессоромъ *Надлеромъ* — «историческая судьба христіанскихъ племенъ подъ турецкимъ господствомъ», приватъ-доцентомъ *Владиміровымъ* — «о судѣ присяжныхъ», доцентомъ *Деларю* — «о степени непогрѣшимости приговоровъ присяжныхъ съ точки зрѣнія теоріи вѣроятности», экстра-орд. проф. *Гарничъ-Гарницкимъ* — «о водѣ, ея физическихъ и химическихъ свойствахъ», орд. проф. *Лазаревичемъ* — «о физическомъ воспитаніи дѣтей», орд. проф. *Бекетовымъ* — «историческій взглядъ на развитіе химическихъ зна-

ній», учителемъ 3-й харьков. гимназіи *Спасскимъ* — «о нищенствѣ въ предѣлахъ харьковской губерніи».

2 января истекшаго года въ одной изъ университетскихъ аудиторій сенаторомъ барономъ Н. Е. *Торнау* прочитана была публичная лекція, служившая введеніемъ въ курсъ русской стенографіи, читанный въ теченіи цѣлаго года коллежскимъ ассесоромъ *Устиновымъ*.—

Въ истекшемъ 1868 году напечатаны и приготовлены къ напечатанію слѣдующіе учено-литературные труды преподавателей и другихъ лицъ, принадлежащихъ къ университету:

Орд. проф. *Лавровскаго 1-го*: 1) «О Крыловѣ и его литературной дѣятельности» (Журн. мин. народ. пр. 1868. Февраль). 2) «О русской народной поэзіи» (Филол. Зап. 1868. № 2.).

Орд. проф. *Лавровскаго 2-го:* 1) «О сочиненіи о. *Петровича*: Богомилы» (Газ. Москва. № 174). 2) «О четвертой части пѣсенъ Рыбникова» (Жур. мин. народ. пр. 1868. Мартъ). 3) «О славянской матицѣ» (Газ. Русскій. 1868. № 1). 4) «Греки или славяне были св. Кириллъ и Меѳодій?» (Тамъ-же № 26). 5) «Поѣздка во внутреннюю Чехію весною 1860 г. (Въ сборникѣ «Утро» 1868). 6) Дѣйствительно ли Кириллъ солунскій — авторъ латинскихъ апологовъ» (Жур. мин. народ. пр. 1868. Іюль). 7) «О связи древней Россіи съ славянскимъ міромъ» (Газета Москва. 1868 г. №№ 95—97). 8) «Паденіе Чехіи въ XVII вѣкѣ» (Чт. общ. ист. и древн. россійскихъ 1868 года. Кн. 2). 9) «Сербско-русскій словарь». (Печатается 2-ымъ Отд. И. академіи наукъ).

Заслуженнаго орд. проф. *Деллена*, «Proemium, quo scholas suas, de historia litterarum romanarum in Caesarea litterarum universitate charcoviensi habendas, die aug. m. XXVIII anni 1868, aperuit» (Печатается въ приложеніяхъ къ протоколамъ засѣданій совѣта).

Орд. проф. *Петрова*, «Очерки изъ всеобщей исторіи». Харьковъ. 1868. (Напечатано на счетъ университета).

Орд. проф. *Питра 2-го*, «Ueber Chlorangium esculentum» (Hedwigia. 1868. № 1).

Орд. проф. *Левяковскаго*, «О способѣ образованія рѣчныхъ долинъ на югѣ Россіи». Рѣчь, приготовленная для произнесенія на актѣ сего года.

Доцента *Шимкова*, «Опытъ физическаго объясненія соотношенія между теплотою и электричествомъ» (Приложен. къ прот. засѣд. сов. харьк. унив. 1868. № 7).

Доцента *Деларю*, «О разысканіи особенныхъ рѣшеній дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, зависящихъ отъ двухъ перемѣнныхъ» (Тамъ-же № 1).

Доцента *Степанова* «Исторія развитія Calyptraea» (Тамъ-же № 6).

Приватъ-доцента *Алексѣева:* 1) «Монографія ученія о притяженіи и теорія потенціаловъ» (Печатается). 2) «Курсъ дифференціальныхъ уравненій» Георга Буля. Переводъ съ англійскаго (Тамъ-же №№ 2—4, 6, 8 и 9).

Доцента *Ковальскаго:* «О числѣ постоянныхъ произвольныхъ, входящихъ въ общій интегралъ дифференціальныхъ уравненій о двухъ перемѣнныхъ» (Тамъ-же № 7).

Исполняющаго обязанности консерватора ботаническаго кабинета кандидата *Шперкъ:* 1) «Очеркъ альгологической флоры Чернаго моря» (Тамъ-же №№ 8 и 9). 2) «О гимноспермiи». Сочиненіе это, удостоенное въ прошедшемъ году совѣтомъ университета награжденія золотою медалью, нынѣ, по опредѣленію Императорской академіи наукъ, печатается въ Запискахъ академіи.

Доцента *Бріо*, «Кристаллографическія и кристалло-оптическія изслѣдованія нѣкоторыхъ искусственныхъ кристалловъ» (Прил. къ прот. 1868. № 2).

Стипендіатовъ университета, кандидатовъ: *Кирпотенка*, «Современное состояніе ученія о растительной клѣточкѣ» (Тамъ же № 5), и *Гурова*, «Главные результаты геологическихъ изслѣдованій, произведенныхъ въ изюмскомъ уѣздѣ въ 1868 году» (Тамъ-же. № 6).

Орд. проф. *Каченовскаго* нѣсколько небольшихъ рецензій напечатано въ С.-петербургскихъ вѣдомостяхъ и въ Вѣстникѣ Европы.

Орд. проф. *Лямбля:* 1) «Sur la nouvelle méthode de Mr. Brunetti». Paris. 1868. 2) «Zur Behandlung von inneren Einklemmungen» (Virchow's Archiv. Bd. 45). 3) «Описаніе анатомическихъ препаратовъ проф. Брунетти, бывшихъ на всемірной парижской выставкѣ 1867 года» (Прот. Общ. врачей, за 1867). 4) «Hernia diaphragmatica dextra» (Тамъ-же). 5) «О невромѣ». Рефератъ о сочиненіи д-ра Caizergues. Montpellier. (Тамъ-же). 6) «Obliteratio venae cavae ascendentis, Echinococcus» (Тамъ-же). 7) Extrophia vesicae urinariae (Выворотъ мочеваго пузыря), съ литогр. рисунками. (Тамъ-же). 8) «О смерти Василія Свинаря. Судебное разбирательство и критическія замѣчанія: а) о воспаленіи мозга и мозговыхъ оболочекъ, б) объ аневризмѣ сонной артеріи и о пьянствѣ» (Отправлено для напечатанія въ Арх. судеб. медицины).

Орд. профес. *Грубе:* 1) «Eine kurze Bemerkung zu Dr. Baas Abhandlung «Neue Methode der Operationsübungen an Leichen». (Deutsche Klinik. 1868. № 12). 2) «О двухъ случаяхъ овaріотоміи, произведенной лѣтомъ 1866 г. (Прот. Мед. общ. 18 мая 1868). 3) «Замѣчательный случай опухоли гортани и удаленіе ея гальвано-каустическою петлею» (Тамъ-же 12 окт. 1868).

Орд. проф. *Лазаревича:* «Pelvimeter zur inneren und äusseren Beckenmessung mit gleichzeitiger Bestürmung der Beckenneigung. Mit 3 Abbild. (Monatschrift für Geburtskunde. 1868. H. 5). 2) «Діафаноскопія, или просвѣчиваніе въ примѣне-

ніи къ изслѣдованію тканей и органовъ въ женскомъ тазѣ» (Прил. къ прот. засѣд. сов. харьк. унив. 1868. №4). 3) «Diaphanoscopie». (Kharkoff. 1868). 4) «Вниманіе къ дѣтямъ и къ матерямъ», съ оригинальными рисунками въ текстѣ (Печатается). 5) «О дренажныхъ маточныхъ пессаріяхъ. (Отослано въ Общество русскихъ врачей въ С.-Петербургъ).

Экстра-ордин. проф. *Хронщевскаго*: 1) «Arbeiten aus dem histologischen Institute zu Charkow vom academischen Jahre $18^{66}/_{67}$» (Virchow's Archiv. 44 Bd.). Приготовлено къ напечатанію: 2) «О лимфатическихъ сосудахъ кожи, по методу всасыванія». Работа эта, требовавшая большихъ издержекъ, произведена на сумму, присланную проф. Хронщевскому изъ Русскаго бальнеологическаго общества (въ Пятигорскѣ). 3) «О лимфатическихъ сосудахъ зародышевыхъ оболочекъ человѣка».

Доцента *Сыцянко:* 1) «De la reaction des nerfs auditifs sous l'influence du courant galvanique» (Annales de l'électricité. 1868. №№ 2—4). 2) «Ein Fall der Amputation durch Blitzstrahl» (Berliner Klin. Woch. № 21). 3) «Ueber die antiphlogistische Wirkung des galvanischen Strom» (Отослано для напечатанія въ томъ-же изданіи). 4) «Результаты опытовъ надъ явленіями электротона въ металлическихъ проволокахъ» (Моск. Медиц. Газ.). 5) «Изслѣдованіе причины, такъ называемаго, отрицательнаго уклоненія при дѣятельномъ состояніи нерва». 6) «Потеря возбудимости нерва при сохраненной способности проводить возбужденіе въ нервахъ человѣка». (Послѣднія двѣ статьи отправлены въ редакцію Моск. медиц. газеты).

Прозектора анатоміи *Вилкомирскаго:* 1) «О хилопластикѣ». Харьковъ. 1868. 2) «Объ овaріотоміи». Харьковъ. 1868. 3) Отчетъ о поѣздкѣ за границу въ 1868 году (печатается).

Ординатора хирургической клиники *Дудукалова*, «Наблюде-

нія и опыты надъ возстановленіемъ костянаго небнаго свода. (Уранопластика Лангенбека). Харьковъ. 1868.

Ординатора акушерской клиники *Ясинскаго*, «Къ ученію о строеніи дѣтскаго мѣста». Харьковъ. 1868.

Помощника Прозектора *Котелевскаго*, «Къ ученію о судебно-медицинскомъ вопросѣ — родился ли младенецъ живымъ или мертвымъ». Харьковъ. 1868.

Стипендіата университета лѣкаря *Черная*, «Ueber den Verschluss der Gefässe bei der Acupressur». (Centralblatt für med. Wissenschaften. 1868. № 50).

Въ истекшемъ году доцентъ *Стояновъ* совершилъ, съ пособіемъ отъ университета, путешествіе за границу для собранія матеріаловъ въ архивахъ парламента и въ другихъ учрежденіяхъ Парижа для предпринятаго имъ ученаго труда по исторіи адвокатуры, преимущественно французской.

Орд. проф. *Леваковскій* командированъ былъ (на собственный его счетъ) въ губерніи — харьковскую, полтавскую и кіевскую для продолженія начатыхъ имъ геологическихъ изслѣдованій въ упомянутыхъ губерніяхъ.

Исполняющій обязанности консерватора ботаническаго кабинета кандидатъ *Шперкъ* совершилъ путешествіе на южный берегъ Крыма и на Кавказъ для изученія мѣстной флоры и собиранія коллекцій для университетскаго ботаническаго кабинета. Всѣхъ растеній собрано имъ, вмѣстѣ съ студентомъ Рейнгардтомъ, до 800 видовъ. Главнымъ образомъ ими изслѣдованъ былъ сухумскій заливъ и его окрестности, но они дѣлали также путешествіе въ цебельдинскій округъ и въ дальское ущелье (въ Абхазіи). Особенное вниманіе г. Шперка обращено было на морскія водоросли. Изложеніе результатовъ его изслѣдованій и описаніе новыхъ видовъ, имъ найденныхъ, заключается въ вышеупомянутой статьѣ его: «Очеркъ альгологической флоры Чернаго моря».

Стипендіатъ университета кандидатъ *Гуровъ* въ теченіи лѣта истекшаго года занимался геологическими изслѣдованіями въ зміевскомъ и изюмскомъ уѣздахъ харьк. губ. Изслѣдованія эти, которыхъ главные результаты изложены въ статьѣ г. Гурова, напечатанной въ Приложеніяхъ къ протоколамъ совѣтскихъ засѣданій (1868. № 6), обогатили геологію харьковской губерніи: 1) открытіемъ новаго мѣстонахожденія юрскихъ пластовъ (с. Черкасское), составляющихъ при томъ особую группу пластовъ, лежащихъ выше коралловаго известняка, который у насъ вообще считается самымъ верхнимъ членомъ юрскихъ образованій (только въ Каменкѣ были извѣстны пласты, по положенію своему аналогичные съ открытыми г. Гуровымъ въ Черкасскомъ и Протопоповкѣ); 2) открытіемъ пермскихъ осадковъ въ срединѣ изюмскаго уѣзда въ с. Курулькѣ. Кромѣ того г. Гуровъ сдѣлалъ много и другихъ наблюденій для разъясненія геологическаго строенія изслѣдованной имъ части харьк. губерніи и собралъ богатую коллекцію мѣстныхъ горныхъ породъ и окаменѣлостей. Коллекція эта, имѣющая важное научное значеніе и стоившая собирателю большихъ трудовъ и значительныхъ издержекъ, пріобрѣтена отъ него для университета за 400 руб. сер.

Въ 1868 году подвергались словесному испытанію въ медицинскомъ факультетѣ на степень доктора медицины—6; въ физико-математическомъ—на степень магистра—4, а именно: 1 по разряду ботаники, 1 по разряду минералогіи и 2 по разряду химіи; по юридическому—на степень магистра 5, а именно: 2 по разряду уголовнаго права, 1—гражданскаго права, 1—государственнаго права и 1—полицейскаго права.

На основаніи правилъ испытанія на ученыя степени и званія, удостоены:

Степени доктора	12
— магистра	2

Степени кандидата 61
Званія дѣйствительнаго студента 24
— лѣкаря съ отличіемъ 3
— лѣкаря 12
— уѣзднаго врача 13
— провизора 11
— аптекарскаго помощника 17
— повивальной бабки 5

Получили право на чтеніе въ университетѣ лекцій въ качествѣ приватъ-доцентовъ — 7, а именно: магистръ *Брiо* по предмету минералогіи; кандидаты: *Гаттенбергеръ* — полицейскаго права, *Григоревскій* — греческой словесности; доктора медицины: *Гиршманъ* — офталмологіи, *Дудукаловъ* — оперативной хирургіи, *Котелевскій* — судебной медицины, *Кузнецовъ* — ученія о накожныхъ болѣзняхъ.

На основаніи § 42 устава, оставлены при университетѣ стипендіатами для приготовленія къ профессорскому званію кандидаты: *Гуровъ* — по предмету геологіи и палеонтологіи, *Головачевъ* — химіи, *Бокій* — физики, *Веребрюсовъ* — астрономіи и *Алексѣенко* — финансоваго права.

Въ 1868 году на покрытіе штатныхъ расходовъ по финансовой смѣтѣ университета ассигновано было 253.959 р. 20 к.

Въ спеціальныя средства университета поступило сбора за слушаніе лекцій со студентовъ 13.910 р., изъ коихъ, за произведенными въ теченіи года, на основаніи § 109 унив. устава, расходами, состояло въ остаткѣ къ 1 января 1869 г. 4.568 р. 80 к.

Посторонними слушателями внесено 2.028 рубл. 50 коп.; изъ нихъ, на основаніи прим. къ § 105 унив. устава, поступило въ пользу преподавателей по принадлежности 1968 р. 50 к., а 60 руб. опредѣлено употребить на выдачу пособій недостаточнымъ студентамъ.

Въ 1868 году въ пользу университета сдѣланы слѣдующія пожертвованія:

1) Отъ механика *Эдельберга* — китайскій альбомъ и кружка XVII столѣтія, снимокъ съ оригинала, находящагося у князя Лихтенштейна.

2) Отъ главной варшавской школы — аэролитъ, упавшій въ 1867 году близъ Пултуска.

3) Отъ г-жи *Кусаковой* — 5 серебряныхъ монетъ.

4) Отъ г-жи *Зиберъ* — 22 мѣдныя монеты и 5 серебряныхъ и 1 турецкая ассигнація.

5) Отъ проф. *Лазаревича* — пельвиметръ.

6) Отъ купца *Сприка* — голова моржа.

7) Отъ проф. *Брунетти* — 22 анатомическихъ препарата, приготовленныхъ по его способу.

8) Отъ купца *Калашникова* — картина, изображающая св. Іоанна Богослова.

9) Для библіотеки университета поступило отъ разныхъ мѣстъ и лицъ различныхъ изданій 255 названій.

10) Г. старшій предсѣдатель харьк. судебной палаты, баронъ *Н. Е. Торнау*, препроводилъ къ ректору университета 720 р., собранные по подпискѣ, составленной чинами судебнаго вѣдомства при празднованіи ими 16 минувшаго ноября годовщины открытія харьковскихъ судебныхъ учрежденій, при участіи приглашенныхъ на это празднество начальника губерніи П. П. Дурново и городскаго головы Н. Д. Шатунова. Деньги эти назначены жертвователями для вспомоществованія недостаточнымъ студентамъ юридическаго факультета, уроженцамъ губерній, составляющихъ харьковскій судебный округъ; распредѣленіе ихъ между нуждающимися студентами предоставлено усмотрѣнію г. ректора.

Къ 1 января 1868 года состояло студентовъ:

По историко-филологическому факультету . . . . 26.

— физико-математическому . . . . . 106.
— юридическому . . . . . 257.
— медицинскому . . . . . 89.

Итого 478

Изъ сего числа выбыло:
За окончаніемъ курса . . . . . 60.
Уволено по прошеніямъ . . . . . 20.
Исключено за невзносъ платы за слушаніе лекцій . 29.
Умерло . . . . . 2.

Итого 111.

Въ началѣ $18^{68}/_{69}$ акад. года вновь поступило:
а) По аттестатамъ гимназій . . . . . 166.
б) По аттестатамъ другихъ учебныхъ заведеній . . 30.

Итого 196.

Изъ нихъ 18 подвергались повѣрочному испытанію въ университетѣ, на основаніи §§ 85 и 86 унив. устава.

За-тѣмъ къ 1 января 1869 года состоитъ студентовъ:
По историко-филологическому факультету . . . . 27.
— физико-математическому . . . . . 119.
— юридическому . . . . . 299.
— медицинскому . . . . . 118.

Итого 563.

Постороннихъ слушателей университетскихъ лекцій къ 1 янв. 1868 года состояло въ спискѣ 64, къ 1 янв. 1869 г. — 45.

Изъ числа студентовъ, обязанныхъ вносить плату за слушаніе лекцій, освобождены были отъ таковой 40.

Стипендіями разныхъ наименованій пользовались къ 1 января 1869 года 109 студентовъ.

Недостаточнымъ студентамъ, изъ числа непользующихся стипендіями, выдано въ пособіе (въ размѣрѣ отъ 15 до 100 р. с. на полугодіе) всего въ оба полугодія 8.452 р.

Изъ диссертацій, представленныхъ подвергавшимися испытанію для полученія степени кандидата, двѣ, по своимъ замѣчательнымъ достоинствамъ, признаны совѣтомъ заслуживающими напечатанія на счетъ университета, а именно: Михаила *Алексѣенка* — « Взглядъ на постепенный ходъ ученія о налогѣ у экономистовъ А. Смита, Ж. Б. Сея, Рикардо, Сисмонди и Милля», и *Радкевича* — « О круглыхъ червяхъ, паразитирующихъ въ пищепріемномъ каналѣ таракана» (Blatta). Въ послѣднемъ сочиненіи изложены результаты собственныхъ наблюденій автора.

Студентъ физико-математическаго факультета отдѣленія естественныхъ наукъ 2 курса Владиміръ *Чернявскій*, о сообщеніяхъ котораго, сдѣланныхъ имъ на с.-петербургскомъ съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей, упомянуто было въ отчетѣ университета за прошедшій годъ, въ настоящемъ году издалъ свой обширный трудъ подъ заглавіемъ: « Матеріалы для сравнительной зоографіи Понта, долженствующіе послужить для генеологіи ракообразныхъ », напечатанный въ « Сборникѣ 1-го съѣзда русскихъ естествоиспытателей ». Въ видахъ дальнѣйшаго пополненія тѣхъ-же матеріаловъ авторъ посвятилъ часть лѣта истекшаго года на обслѣдованіе черноморскаго берега Кавказа.

Студентъ того-же отдѣленія 2 к. Людвигъ *Рейнгардтъ* совершилъ, вмѣстѣ съ кандидатомъ *Шперкомъ*, путешествіе на южный берегъ Крыма и на Кавказъ, при чемъ онъ занимался преимущественно низшими водорослями и собралъ ихъ до 200 видовъ, между которыми есть нѣсколько новыхъ. Подробный отчетъ о результатахъ его изслѣдованій приготовляется къ напечатанію.

Студентъ медицинскаго факультета 3 курса Иванъ *Киселевъ* напечаталъ: Ueber die Endigung der sensiblen Nerven der Harnblase (Centralblatt für d. med. Wissenschaften. 1868. №22).

Студентъ 2 курса того-же факультета Сергѣй *Алферовъ*

въ теченіи цѣлаго года занимался изученіемъ микрофотографіи и достигъ замѣчательныхъ результатовъ.

На предложенныя для соисканія наградъ медалями темы въ истекшемъ году представлено было 6 сочиненій: 3 по физико-математическому, 1 по юридическому и 2 по медицинскому факультету. По разсмотрѣніи этихъ сочиненій установленнымъ порядкомъ, авторамъ сочиненій — на тему по физико-математическому факультету: «Изложить всѣ замѣчательные способы, предложенные для рѣшенія задачи Кеплера, и пояснить ихъ численными примѣрами» — удостоенному степени кандидата по отдѣленію математическихъ наукъ, Александру *Веребрюсову*, и студенту 4 курса по тому-же отдѣленію Гурію *Маркову* присуждены: первому золотая медаль, второму — почетный отзывъ; удостоенному степени кандидата по отдѣленію естественныхъ наукъ Ивану *Турбину*, за сочиненіе на тему: «Представить изслѣдованіе водъ ближайшихъ къ Харькову источниковъ» — золотая медаль; по юридическому факультету, за сочиненіе на тему: «Представить изложеніе и сравнительную оцѣнку нынѣшняго городскаго устройства и управленія въ Англіи, Франціи и Пруссіи» — студенту Алексѣю *Кисличному* — серебряная медаль; по медицинскому факультету, за сочиненіе: «О лимфатическихъ сосудахъ печени» — студенту 3-го курса сего факультета Ивану *Киселеву* — золотая медаль; за сочиненіе: «О лимфатическихъ сосудахъ почекъ» — бывшему студенту 5 курса того-же факультета Дмитрію *Рындовскому* — серебряная медаль.

Сочиненія гг. Веребрюсова, Турбина и Киселева опредѣлено напечатать на счетъ университета.

Учебно-вспомогательныя учрежденія университета въ теченіи 1868 года находились въ слѣдующемъ состояніи:

1. Въ *библіотекѣ университета* къ 1 января 1868 года состояло на-лицо 37.758 названій въ числѣ 75.451 волю-

мовъ. Въ теченіи 1868 года вновь поступило 510 названій въ 1027 волюмахъ. Изъ нихъ заслуживаютъ особеннаго вниманія: 1) Atlas der Hautkrankheiten. Text von Prof. Dr. F. Hebra, Bilder von Dr. A. Elfinger und Dr. Fr. Heitzmann. Herausg. von der Kais. Akademie der Wissenschaften. Wien. 1856 — 1866. in fol. 1 vol. 2) Transactions of the Linnaean Society. Vol. 1 — 23. Lond. 1791 — 1861, in 4-to — 23 vol. За-тѣмъ къ 1 января 1869 года числится на-лицо 38.268 названій въ 76.478 волюмахъ. Студентское отдѣленіе заключаетъ въ себѣ 1470 названій. Въ теченіи 1868 года выдано для чтенія 6300 названій, въ томъ числѣ студентамъ 2500 названій. Журналовъ и газетъ было выписано на 1868 годъ 169 названій, въ томъ числѣ русскихъ 51 и иностранныхъ 118 названій.

2. Для *астрономическаго кабинета* пріобрѣтено въ теченіи 1868 г. 14 предметовъ, и къ концу сего года числилось ихъ всего 166. Осенью окончена астрономическая башня, сдѣланная, по указаніямъ проф. Федоренка, механикомъ Вестбергомъ въ Харьковѣ. Она построена въ зданіяхъ университета преимущественно для практическихъ упражненій студентовъ помощію имѣющихся въ астрономическомъ кабинетѣ переносныхъ инструментовъ; но по совершенству механизма и внутренней отдѣлкѣ вполнѣ удовлетворяетъ условіямъ для помѣщенія 9- или 10-футоваго рефрактора. Основаніемъ ея служитъ круглая каменная стѣна, внутренній діаметръ которой равняется 14 футамъ, а высота 21 футамъ. Башня вращается на 12 чугунныхъ колесахъ, по двумъ чугуннымъ рельсамъ. Рельсы привинчены къ двумъ дубовымъ кругамъ, изъ коихъ одинъ прочно лежитъ на каменной стѣнѣ, другой составляетъ основаніе подвижной деревянной башни. Самое вращеніе производится съ большою легкостію помощію особаго механизма, который состоитъ изъ зубчатаго чугуннаго круга, прикрѣпленнаго къ внутренней стѣнѣ башни, небольшой ма-

шины изъ двухъ зубчатыхъ колесъ, и одной шестерни, привинченной къ полу. При наблюденіяхъ открываются помощію блоковъ и веревокъ 8 клапановъ, прикрывающихъ разрѣзъ башни шириною въ 3 фута. Вся башня разнимается на части, которыя могутъ быть удобно вновь сложены.

3. *Физическій кабинетъ* въ прошломъ 1868 году перенесенъ въ болѣе удобное для него помѣщеніе (бывшее помѣщеніе зоологическаго кабинета) съ устройствомъ при немъ аудиторіи, приспособленной къ требованіямъ демонстративнаго курса физики, и нѣсколькихъ комнатъ для практическихъ занятій студентовъ, чрезъ что значительно улучшились условія преподаванія. Благодаря дѣятельному участію университетскаго механика Эдельберга, перенесеніе и размѣщеніе приборовъ совершилось безъ всякихъ поврежденій и самый кабинетъ пріобрѣлъ болѣе изящный видъ. Въ теченіи 1868 года коллекція физическихъ снарядовъ значительно увеличилась: въ началѣ прошлаго года ихъ числилось 464 нумера, а къ 1 января 1869 года число это возросло до 506. Изъ вновь пріобрѣтенныхъ приборовъ заслуживаютъ особеннаго вниманія: 1) приборъ для искусственнаго воспроизведенія гласныхъ (по Гельмгольцу), пріобрѣтенный отъ Кенига въ Парижѣ, 2) электродвигательная машина, приспособленная къ полученію весьма быстраго и равномѣрнаго вращательнаго движенія, 3) большая коллекція резонаторовъ и 4) электрометръ Томсона.

4. *Кабинетъ физической географіи*, существующій уже три года въ видѣ отдѣльнаго учрежденія, къ 1 января 1868 года заключалъ въ себѣ 11 предметовъ, а съ вновь пріобрѣтенными содержитъ въ настоящее время 17 нумеровъ.

5. Въ *химической лабораторіи* въ продолженіи 1868 года пріобрѣтено 120 нумеровъ и за-тѣмъ къ 1 января 1869 года числится 1383 нумера. Лабораторія открыта была для практическихъ занятій студентовъ ежедневно отъ 9 часовъ

утра до 3 по-полудни. Студенты 2, 3 и 4 курсовъ отдѣленія физико-химическихъ наукъ, а также 2 курса отдѣленія естественныхъ наукъ постоянно упражнялись здѣсь въ качественномъ и количественномъ химическомъ анализѣ.

6. Въ *медицинскомъ отдѣленіи химической лабораторіи* къ 1 января 1868 года состояло 150 нумеровъ разныхъ предметовъ, въ теченіи отчетнаго года пріобрѣтено 70 нумеровъ, исключено по негодности 27 и за-тѣмъ къ 1 янв. 1869 года состоитъ 193 нумера. Отдѣленіе это въ истекшемъ году открыто было ежедневно отъ 9 до 3 часовъ для студентовъ 2 и 3 курсовъ медицинскаго факультета, занимавшихся здѣсь элементарнымъ и зоохимическимъ анализомъ, и кромѣ того три раза въ недѣлю — для вечернихъ занятій студентовъ.

Изъ числа работавшихъ въ отдѣленіи обратили на себя особенное вниманіе: студентъ 3 курса Болеславъ *Саницкій*, занимавшійся качественнымъ и количественнымъ анализомъ крови, и посторонній слушатель университетскихъ лекцій Василій *Рубинскій*, изучавшій химическія измѣненія испражненій кишечнаго канала при различныхъ условіяхъ. — Завѣдующій медицинскимъ отдѣленіемъ химической лабораторіи экстра-ординарный профессоръ Тихоновичъ продолжалъ свои изысканія надъ колебаніемъ обмѣна веществъ въ мышцахъ, при чемъ имъ обращено было главное вниманіе на значеніе протеинныхъ веществъ въ мышечной работѣ и на роль, которую играютъ при этомъ углеводы, а также на происхожденіе въ мышцахъ гликогена и инозита и на изученіе двухъ глюкозъ, находящихся въ мышечной ткани. Имъ-же произведено было одно судебно-медицинское изслѣдованіе надъ кровяными пятнами.

6. Въ *минералогическомъ кабинетѣ* къ 1 января 1868 года состояло 11.940 предметовъ. Вновь пріобрѣтено въ теченіи 1868 года 30 нумеровъ инструментовъ и приборовъ.

7. Въ *кабинетѣ геологическомъ* съ *палеонтологическимъ*

собраніемъ къ 1 января 1868 года состояло 600 горныхъ породъ и 2300 окаменѣлостей. Въ теченіи года пріобрѣтено 28 нумеровъ книгъ и геологическихъ картъ и 327 нумеровъ окаменѣлостей и горныхъ породъ изъ южной части харьковской губерніи. Эта интересная и важная въ научномъ отношеніи коллекція собрана кандидатомъ Гуровымъ, какъ объ этомъ уже выше упомянуто. Коллекціи кабинета служили для демонстрацій на лекціяхъ.

8. *Метеорологической обсерваторіи*, какъ отдѣльнаго учрежденія, до настоящаго времени не было въ университетѣ, и метеорологическія наблюденія производились при физическомъ кабинетѣ; къ сентябрю 1869 года предположено открыть особое помѣщеніе для этого учрежденія, въ составъ котораго къ 1 января 1869 г. входятъ 32 нумера инструментовъ и разныхъ предметовъ. Инструменты были употребляемы для демонстрированій на лекціяхъ и для упражненія студентовъ въ производствѣ наблюденій.

9. *Ботаническій садъ* заключалъ въ себѣ къ 1 января 1868 года до 3700 видовъ растеній. Въ теченіи прошлаго года получено изъ разныхъ садовъ до 300 видовъ.

10. Въ *ботаническомъ кабинетѣ* къ 1 января 1868 года состояло 101 нумеръ коллекцій и разныхъ предметовъ. Въ истекшемъ году пріобрѣтено 36 названій книгъ (новыхъ сочиненій и продолженій), 4 продолженія коллекцій споровыхъ растеній и продолженіе коллекцій моделей Бренделя. Практическія занятія студентовъ по ботаникѣ состояли въ опредѣленіи растеній и изученіи анатомическаго строенія ихъ; матеріалами для этого служили живыя растенія ботаническаго сада и гербарій, пособіями — книги и инструменты ботаническаго кабинета.

11. Въ *зоологическій кабинетъ* въ прошломъ 1868 году поступило 49 нумеровъ и въ лабораторію 37 нумеровъ; изъ

нихъ болѣе замѣчательны: 263 микроскопическихъ препарата животныхъ отъ профессора Лейкарта въ Гиссенѣ и коллекція экзотическихъ формъ животныхъ, преимущественно безпозвоночныхъ, купленная отъ Годефруа и Ворле въ Гамбургѣ чрезъ посредство коммиссіонера Эдельберга; для лабораторіи пріобрѣтено сочиненіе *Cuvier*, Le règne animal, redigé par une réunion des desciples de Cuvier. По негодности къ дальнѣйшему храненію изъято изъ употребленія 20 экземпляровъ чучелъ птицъ. Всѣхъ предметовъ, со включеніемъ вновь пріобрѣтенныхъ и за изъятіемъ негодныхъ къ употребленію, числится къ 1 января 1869 года 16.654. Предметы зоологическаго кабинета служили для демонстрацій на лекціяхъ; дублеты давались для опредѣленія студентамъ 3 и 4 курсовъ по отдѣленію естественныхъ наукъ.

12. *Зоотомическій кабинетъ съ лабораторіею* къ 1 января 1868 года заключалъ въ себѣ 1379 нумеровъ; въ теченіи 1868 года поступило 46 нумеровъ препаратовъ, книгъ, мебели, посуды и инструментовъ; въ числѣ послѣднихъ—большой микроскопъ Гартнака. Всего въ зоотомическомъ кабинетѣ съ лабораторіей къ 1 января 1869 года состоитъ 1.425 нумеровъ. — Кабинетъ служилъ пособіемъ при преподаваніи сравнительной анатоміи, гистологіи и эмбріологіи; въ лабораторіи занимались практически студенты 2, 3 и 4 курсовъ отдѣленія естественныхъ наукъ. — Въ истекшемъ году это учрежденіе, а равно кабинетъ зоологическій съ лабораторіей, получили новое, весьма удобное помѣщеніе, прежде принадлежавшее физическому кабинету.

13. *Для физіологическаго кабинета съ лабораторіей*, въ которомъ числилось къ 1 января 1868 года 139 нумеровъ, пріобрѣтено въ истекшемъ году 23 нумера. Изъ нихъ наиболѣе замѣчательны: офтальмометръ Гельмгольца работы Мейерштейна, оптометръ Жаваля для астигматизма и электрическая

машина Гольца. Въ физіологической лабораторіи производились постоянно опыты надъ животными, служащіе для поясненія курса физіологіи, преподаваемой студентамъ медицинскаго факультета.

14. Въ *техническомъ кабинетѣ съ лабораторіей* къ 1 января 1869 года находится 244 модели и до 1000 образцовъ различныхъ техническихъ продуктовъ въ ихъ послѣдовательной обработкѣ. Въ истекшемъ году пріобрѣтено 102 нумера различныхъ аппаратовъ и снарядовъ, въ числѣ которыхъ большой электромагнитный двигатель Сименса и Гальске и поляризаціонный снарядъ Солейля и Фенцке съ принадлежностями. Въ лабораторіи, открытой ежедневно, кромѣ опытовъ, сопровождавшихъ лекціи технической химіи, студенты 3 и 4 курсовъ физико-химическаго отдѣленія занимались количественнымъ анализомъ техническихъ продуктовъ и приготовленіемъ нѣкоторыхъ препаратовъ.

15. Въ *агрономическомъ кабинетѣ* съ *лабораторіей* къ 1 января 1869 состоитъ всѣхъ предметовъ 1139. Изъ занимавшихся въ лабораторіи студентовъ отдѣленія естественныхъ наукъ, студентъ 2-го курса *Хитрово* работалъ надъ опредѣленіемъ химическаго состава и физическихъ свойствъ разновидностей чернозема. Кандидатъ *Армфельдъ* производилъ изслѣдованіе молока разныхъ породъ рогатаго скота, разводимыхъ въ окрестностяхъ Харькова, и образцовъ коровьяго молока, полученныхъ изъ различныхъ мѣстностей Россіи. Лаборантъ *Засядко 2-й* производилъ изслѣдованіе солонцеватыхъ почвъ южной Россіи и занимался опредѣленіемъ химическаго состава степныхъ травъ изъ родовъ Stipa и Agropyrum.

16. *Музей физіологической анатоміи*, послѣ отдѣленія его въ истекшемъ году отъ музеевъ патологической анатоміи и судебной медицины, заключалъ въ себѣ 707 нумеровъ; изъ нихъ 497 нумеровъ собственно препаратовъ и 210 нумеровъ раз-

ныхъ инструментовъ, книгъ и другихъ учебныхъ принадлежностей. Въ теченіи 1868 года пріобрѣтено анатомическихъ сочиненій и атласовъ 7 названій; изъ нихъ особенно интересны выпуски II и III-й топографическаго атласа Брауна и томъ IV сравнительной морфологіи Баркова. Въ коллекцію препаратовъ кабинета физіологической анатоміи поступили: препаратъ синтетическаго мозга, изъ papier maché работы Auzoux въ Парижѣ, представляющій ходъ отдѣльныхъ пучковъ нервовъ внутри мозга по изслѣдованіямъ Lhuys'a; 2) сухіе препараты легкихъ, дѣтскаго сердца, кишекъ, печени и дѣтскаго мѣста, отъ профессоровъ падуанскаго университета Брунетти и Власовича, приготовленные по собственнымъ ихъ методамъ; 3) спиртовые препараты, приготовленные въ анатомическомъ театрѣ здѣшняго университета: a) головнаго мозга (14 параллельныхъ разрѣзовъ въ горизонтальномъ направленіи), b) головныхъ нервовъ (4 препарата) и c) два препарата сердца и его заслонокъ. — Всего же, за сдѣланными въ 1868 году пріобрѣтеніями и за исключеніемъ нѣкоторыхъ предметовъ, оказавшихся негодными къ употребленію, къ 1 генваря 1869 года въ музеѣ физіологической анатоміи состоитъ препаратовъ, книгъ, инструментовъ и разныхъ принадлежностей 725 нумеровъ.

Матеріаломъ для анатомическихъ занятій студентовъ въ 1868 году служили вообще 121 трупъ, поступившіе изъ губернской больницы (37), тюремнаго замка (2), факультетскихъ клиникъ (47), изъ вольной практики (1), доставленныхъ для судебно-медицинскаго изслѣдованія (33) и 1 трупъ сросшихся грудью двухъ младенцевъ изъ Чугуева. Изъ нихъ собственно для практическихъ занятій по физіологической анатоміи служили 61 трупъ. Самыя занятія студентовъ ведены были по прежде принятому плану, то есть: студенты 1-го курса приготовляли связки и мышицы, 2-го курса — сосудистую систему, нервы и внутрен-

ности, а студенты 5-го курса артеріи и нервы по преимуществу области головы, лица и шеи.

17. *Музей патологической анатоміи.* Послѣ раздѣла препаратовъ, инструментовъ и другихъ учебныхъ пособій бывшаго общаго анатомическаго кабинета, на долю музея *патологической анатоміи* досталось 2038 названій разныхъ предметовъ, въ томъ числѣ вещей, инструментовъ и книгъ — 1388, патологическихъ препаратовъ — 650.

Матеріаломъ для анатомическихъ занятій студентовъ въ продолженіи 1868 года служили, какъ выше замѣчено, 121 трупъ. Трупы, доставленные изъ факультетскихъ клиникъ, были вскрываемы въ присутствіи студентовъ 3, 4 и 5-го курсовъ, какъ съ цѣлью повѣрки клиническаго діагноза, такъ и для того, чтобы пріучить студентовъ къ правильному и методическому патолого-анатомическому вскрытію. Изъ остальныхъ труповъ, поступившихъ въ анатомическій театръ, были вынимаемы болѣзненно измѣненные органы и, съ объясненіями, показываемы на лекціяхъ патологической анатоміи; подобные же свѣжіе патологическіе препараты были доставляемы музею патологической анатоміи изъ губернской больницы и вольной практики. Болѣе поучительные изъ сихъ препаратовъ сбережены и поступили въ составъ коллекцій патолого-анатомическаго музея. Изъ нихъ болѣе замѣчательны слѣдующіе: 1) Sclerosis cerebri, 2) Meningitis purulenta, 3) Prostatitis suppurativa, 4) Perihepatitis hyperplastica villosa, 5) Hernia cruralis dextra, 6) Cystosarcoma gallertiforme, 7) Fibroma tunicae vaginalis testis sinistri, 8) Carcinoma renis sinistri, 9) Carcinoma medullare hepatis, ventriculi et glandularum lymphaticarum, 10) Hemikephalus, 11) Thoraco-pagus (Sterno-pagus), два сросшіеся между собою ребенка женскаго пола, присланные по распоряженію начальника харьковской губерніи, изъ г. Чугуева, рожденные женою унтеръ-офицера Ѳеклою Закупцовою. Они срослись перед-

ними сторонами туловища, именно — нижними частями груди и верхними отдѣлами брюха, и оба имѣютъ одну общую пупови-ну; 12) важное и самое интересное пріобрѣтеніе музея состав-ляютъ препараты Брунетти въ числѣ 21.

При *систематическомъ* изложеніи патологической анатоміи, показываемые были всѣ подходящіе препараты кабинета какъ естественные, такъ и искусственные. Сверхъ того г. профес-сору Хронщевскому для демонстрацій при чтеніи имъ лекцій гистологіи отпускаемы были въ продолженіи 1867 — 1868 акад. года слѣдующіе микроскопическіе препараты изъ патолого-ана-томическаго кабинета: 1) по общей гистологіи 24 препарата, 2) по предмету устройства зубовъ и костей — 12, 3) пи-щеваго канала — 4, 4) печени — 24, 5) селезенки и лимфа-тическихъ сосудовъ — 14, 6) почекъ — 18, 7) половыхъ ор-becъ — 9, 8) кожи — 17, 9) нервной системы — 11, 10) глаза — 13; всего 146 препаратовъ.

18. Въ *гистологическомъ кабинетѣ* къ 1 января 1868 го-да числилось 11 микроскоповъ, а съ остальными принадлежно-стями всего 39 нумеровъ. Въ теченіи 1868 года пріобрѣте-но 21 нумеръ разныхъ предметовъ, такъ-что къ 1 января 1869 года состоитъ на-лицо всего 60 нумеровъ. Въ кабинетѣ, кромѣ постоянныхъ демонстрацій, сопровождавшихъ лекціи ги-стологіи, занимались практически: 1) студенты 2-го курса; занятія ихъ состояли въ приготовленіи препаратовъ, сообразно съ ходомъ преподаванія; 2) студентъ 2-го курса *Алферовъ*, посвятившій цѣлый годъ на изученіе микрофотографіи; 3) сту-дентъ 3-го курса *Киселевъ*, 4) бывшій студентъ 5-го курса *Рындовскій*, 5) стипендіатъ университета докторантъ *Чернай*, 6) лѣкарь *Пономаревъ*, 7) военный врачъ, докторантъ *Леон-товичъ*, 8) военный врачъ *Манцевичъ*. Въ теченіи 1868 го-да напечатаны слѣдующія спеціальныя работы, сдѣланныя подъ руководствомъ профессора Хронщевскаго:

1) Докторанта *Афанасьева* — «Ueber den Anfang der Lymphgefässe in den serösen Häuten» въ Virchow's Archiv (XLIV Band).

2) Докторанта *Черная* — «Ueber den Verschluss der Gefässe bei der Acupressur» въ Centralblatt für d. med. Wissensch. 1868. № 50.

3) Студента *Киселева* — «Ueber die Endigung der sensiblen Nerven der Harnblase» въ Centralblatt für d. med. Wissensch. 1868. № 22.

4) Въ напечатанномъ въ Вирховскомъ архивѣ отчетѣ о дѣятельности гистологическаго кабинета въ 1866 — 1867 акад. году подъ заглавіемъ: «Arbeiten aus dem histologischen Institute zu Charkow vom akademischen Jahre 1866 — 1867», помѣщены рефераты о работахъ гг. Афанасьева, Ясинскаго, Дудукалова, Рындовскаго (двѣ работы), Леонтовича, Домбровскаго и Закса (двѣ работы). Приготовляются къ печати, кромѣ вышепоименованныхъ, удостоенныхъ наградъ медалями, работъ: студента *Киселева* «О лимфатическихъ сосудахъ печени» и студента *Рындовскаго* «О лимфатическихъ сосудахъ почекъ», работы: лѣкаря *Закса* «О лимфатическихъ сосудахъ надкостной плевы и костей», и военнаго врача, докторанта *Леонтовича*, «О развитіи эпителіальнаго рака (эпителіома)».

19. Въ *фармацевтической лабораторіи* и *кабинетѣ* къ 1 января 1868 года состояло на-лицо 390 нумеровъ. Въ теченіи прошлаго года пріобрѣтено 10 нумеровъ и исключено по негодности къ употребленію 28 нумеровъ; за-тѣмъ къ 1 января 1869 года числится 372 нумера. Въ лабораторіи въ продолженіе года занимались: подвергавшихся экзамену на степень провизора — 11, на званіе аптекарскаго помощника — 15 и нѣсколько аптекарскихъ учениковъ.

20. Въ *хирургическомъ и офтальмологическомъ кабинетѣ*

къ 1 января 1868 года числилось 1079 нумеровъ. Въ теченіи года число нумеровъ увеличилось на 62. Важнѣйшіе изъ пріобрѣтенныхъ предметовъ слѣдующіе: для пополненія недостатка въ преподаваніи практической офталмологіи пріобрѣтена полная коллекція усовершенствованныхъ инструментовъ Грефе для операціи катаракты по новѣйшему способу линейнаго сѣченія (Extractio linearis), астигматическій оптометръ Жаваля, офталмоскопъ Галезовскаго, орудіе для высасыванія катарактъ и нѣкоторые другіе. Къ инструментамъ для производства операцій въ гортани прибавлены лучшіе освѣтительные снаряды — ларингоскопы Зигля, Лабордетта и др. Для операцій на мочеполовыхъ органахъ пріобрѣтены усовершенствованные инструменты для удаленія инородныхъ тѣлъ, для разбиванія камней въ мочевомъ пузырѣ, для діагностики болѣзней этихъ органовъ и проч., для безопаснѣйшаго употребленія хлороформа — извѣстный снарядъ Скиннера.

21. Въ *акушерскомъ кабинетѣ* къ 1 января 1868 года состояло разныхъ инструментовъ и приборовъ, всего 513 предметовъ. Въ теченіи 1868 года исключено по негодности къ употребленію 30 предметовъ и вновь пріобрѣтено 121; за-тѣмъ къ 1 января 1869 года состоитъ 604 предмета.

22. Для *судебно-медицинскаго кабинета* пріобрѣтено въ истекшемъ году новѣйшее изданіе судебной медицины Каспера и 24 анатомическихъ инструмента.

Въ истекшемъ году произведено было 33 судебно-медицинскихъ вскрытія. Въ числѣ вскрытыхъ было: 25 труповъ мужчинъ, 5 женщинъ и 3 новорожденныхъ младенцевъ, послѣдніе всѣ были женскаго пола. Изъ нихъ a) умершихъ насильственною смертію 13, а именно: 4 отъ поврежденія костей черепа и ушибовъ головы, 1 былъ замерзшій, 4 повѣсившихся, 1 застрѣленный, 1 застрѣлившійся, 1 утонувшій, 1 умершій отъ угара; b) умершихъ скоропостижно 16, а именно: 3 отъ вос-

паленія легкихъ, 2 отъ скорбута, 4 отъ пьянства, 4 отъ бугорчатки легкихъ, 2 отъ гипереміи мозга и легкихъ, 1 отъ пузырчатыхъ глистовъ въ печени. Изъ числа новорожденныхъ младенцевъ, 2 оказались живорожденными и умерли 1 отъ удавленія и 1 отъ задушенія; 3-ій оказался мертворожденнымъ. Кромѣ того въ теченіи года были производимы микроскопическія и химико-микроскопическія изслѣдованія кровяныхъ и другихъ пятенъ съ судебно-медицинскими цѣлями. Изъ числа произведенныхъ изслѣдованій труповъ особенно замѣчательны: рѣдко случающееся въ Россіи умышленное самоубійство угаромъ и случай смерти отъ пузырчатыхъ глистовъ печени, приблизительно три-четверти существа которой было уничтожено гнѣздами эхинококкусовъ.

23. А. *Въ терапевтической клиникѣ* въ истекшемъ 1868 году пользовалось всѣхъ больныхъ 491; изъ нихъ стаціонарныхъ было 237, амбуляторныхъ—254. Бѣднѣйшіе изъ амбуляторныхъ больныхъ пользовались лѣкарствами на счетъ клиники. Изъ числа стаціонарныхъ больныхъ выздоровѣли 178, получили значительное облегченіе 20, выписались изъ клиники не получивъ никакого облегченія 6, умерло 25 больныхъ. Наибольшее число умершихъ нужно отнести на-счетъ тифа и легочной чахотки: такъ, изъ 34 тифозныхъ умерло 7, а изъ 12 чахоточныхъ умерло 5. Преобладающія формы болѣзней были: различные виды тифа, возвратная горячка, легочная чахотка, различнаго рода невральгіи, ревматизмы, болѣзни почекъ и водянки, зависящія преимущественно отъ опухолей брюшныхъ органовъ; преобладающая форма тифа — брюшной тифъ, сопряженный нерѣдко съ значительными мозговыми припадками. Сыпныхъ тифовъ было хотя немного, всего 5, но за-то очень тяжелыхъ, именно: изъ 5 больныхъ умерло 3. Изъ больныхъ, страдавшихъ возвратною горячкою, ни одинъ не умеръ. Вообще замѣчательно, что не только въ настоящемъ, но и въ прошедшіе годы не былъ на-

блюдаемъ въ терапевтической клиникѣ ни одинъ случай смерти отъ возвратной горячки. Что касается амбуляторныхъ больныхъ, то, по неаккуратности посѣщенія ими клиники, вѣрныхъ свѣдѣній объ исходѣ ихъ болѣзней не имѣется.

Въ терапевтической клиникѣ занимались студенты 4 и 5 курсовъ медицинскаго факультета. Занятія ихъ состояли въ изученіи методовъ изслѣдованія больныхъ, въ распознаваніи и лѣченіи ихъ болѣзней, въ веденіи скорбныхъ листовъ и составленіи по нимъ исторій болѣзней. Наибольшее вниманіе при занятіи со студентами обращено было на выслушиваніе и постукиваніе, на макроскопическое и микроскопическое изслѣдованіе различныхъ патологическихъ выдѣленій; кромѣ того студенты означенныхъ курсовъ занимались ларингоскопіей и отоскопіей.

Въ *маньковскомъ электротерапевтическомъ заведеніи*, состоящемъ при терапевтической клиникѣ, въ истекшемъ году было пользовано 232 больныхъ; въ нѣкоторыхъ случаяхъ приходилось назначать болѣе рѣдкіе сеансы или даже и вовсе отказывать въ пріемѣ, потому-что не было физической возможности удовлетворять всѣхъ являвшихся въ заведеніе, такъ-какъ иногда приходилось дѣлать болѣе 20 сеансовъ въ день. Особенно успѣшные результаты получались, такъ-же какъ и прежде, въ ревматизмахъ, невральгіяхъ, мѣстныхъ воспаленіяхъ, мѣстныхъ водянкахъ, язвахъ. Къ сожалѣнію, послѣдніе три отдѣла болѣзней очень рѣдко встрѣчаются въ электротерапевтической практикѣ, потому-что не только въ публикѣ, но и между врачами еще существуетъ убѣжденіе, что электричество можетъ приносить пользу лишь въ параличахъ и въ пораженіяхъ нервовъ чувствовательныхъ. Думаютъ также, что электричество дѣйствуетъ на человѣческій организмъ лишь возбуждающимъ образомъ, и поэтому въ болѣзняхъ острыхъ, воспалительныхъ оно противупоказуется. Между-тѣмъ въ маньковскомъ заведеніи не встрѣчалось случаевъ, въ которыхъ бы мѣстное воспаленіе какой-либо

части тѣла, доступной для электрода, не разрѣшилось послѣ 3—4 примѣненій гальваническаго тока (+ на воспаленное мѣсто). Было довольно много случаевъ почти мгновеннаго прекращенія зубной боли подъ вліяніемъ постояннаго гальваническаго тока. Въ падучей болѣзни обыкновенно прекращались припадки на болѣе или менѣе продолжительное время. Но само собою разумѣется, что относительно болѣзни, обнаруживающейся лишь неправильно періодически, о полномъ выздоровленіи можно говорить только въ тѣхъ случаяхъ, когда врачъ нѣсколько лѣтъ не теряетъ больнаго изъ виду.

Къ 1-му января 1868 г. въ составъ маньковскаго заведенія входило 273 нум. разныхъ снарядовъ и проч.; въ теченіе года пріобрѣтено 40 нумеровъ. Исключено по негодности 3 нумера, за-тѣмъ къ 1-му января 1869 г. состоитъ 314 нумеровъ. Снаряды заведенія служили: 1) для пользованія больныхъ, 2) для производства опытовъ на лекціяхъ теоріи электротерапіи, 3) для упражненій нѣкоторыхъ студентовъ 2-го курса въ производствѣ опытовъ по предмету электрофизіологіи; 4) завѣдующій заведеніемъ доцентъ Сыцянко производилъ изслѣдованія надъ явленіями электротона и отрицательнаго уклоненія; о результатахъ этихъ изслѣдованій напечатано въ Московской медицинской газетѣ истекшаго года.

В. Въ *хирургической* клиникѣ въ теченіи 1868 г. пользовалось 1985 больныхъ, въ томъ числѣ стаціонарныхъ 210; изъ послѣднихъ выздоровѣло 179, получило облегченіе 13, умерло 18. Изъ числа умершихъ — 10 были припяты въ клинику, для показанія студентамъ безнадежно-тяжкихъ поврежденій, и умерли вскорѣ по принятіи; въ этомъ числѣ были три случая высшей степени ожоги, занимавшей не менѣе третьей части поверхности всего тѣла (въ одномъ случаѣ даже двѣ-трети), два случая раздробленія костей черепа съ размозженіемъ содержимаго, одинъ случай одновременнаго перелома позвонка нѣ-

сколькихъ реберъ и грудной кости у 85-лѣтняго старика, одинъ случай обширнаго раковиднаго пораженія и т. под. Всѣ исчисленные случаи стоятъ уже внѣ предѣловъ медицинскаго искусства. О результатахъ лѣченія амбуляторныхъ больныхъ положительныхъ свѣдѣній не имѣется, по неаккуратности посѣщенія ими клиники. Въ теченіи прошедшаго года клиника пользовалась очень разнообразнымъ матеріаломъ. Преобладающими формами болѣзней были: различныя доброкачественныя и злокачественныя новообразованія, костоѣда, антоновъ огонь, камни мочеваго пузыря, воспаленія глазъ и ихъ исходы, переломы, вывихи, врожденныя и пріобрѣтенныя уродства и искривленія, свищи, различные виды воспаленій, нарывовъ, ранъ, язвъ и т. п. Кромѣ замѣчательныхъ нижеописанныхъ случаевъ, въ преобладающихъ формахъ болѣзней попадалось не малое количество интересныхъ въ научномъ отношеніи или по своему положенію въ частяхъ, гдѣ такія болѣзни встрѣчаются рѣдко, или по громадности своего развитія, или же, наконецъ, по своему теченію; для примѣра слѣдуетъ упомянуть объ огромномъ костяномъ наростѣ яичка, объ одновременномъ переломѣ голени бедра и предплечія, о камнѣ мочеваго пузыря, вѣсящемъ около фунта, и т. п. На упомянутомъ числѣ больныхъ произведено 670 операцій. Изъ нихъ, студентами произведено 63, ординаторами 50, а остальныя — профессоромъ клиники. Въ числѣ послѣднихъ между прочимъ: операцій катаракты 35 (въ 32 случаяхъ по новѣйшему способу Грефе — линейнаго сѣченія); образованій искусственнаго зрачка (Iridectomia, Iridodesis, Iridorhexis) — 12; пластическихъ операцій 24, а именно: образованій губы — 19, возстановленіе носа — 1, щекъ — 1, вѣкъ — 3, вырѣзываній камней мочеваго пузыря — 5. О послѣдней операціи необходимо замѣтить, что способомъ самой операціи, равно какъ и послѣдовательнымъ лѣченіемъ, измѣненными и упрощенными проф. Грубе, въ истекшемъ году достигнуты столь-же благопріятные ре-

зультаты, какъ вообще въ продолженіе трехъ послѣднихъ лѣтъ, съ тѣхъ поръ какъ этотъ способъ вошелъ въ употребленіе въ харьковской хирургической клиникѣ. Дробленіе камней произведено у одного больнаго съ видимымъ успѣхомъ. Операцій съуженія мочеваго канала произведено двѣ, по способамъ кроваваго и некроваваго расширенія (Гольта, Мезоннева и др.); операцій закрытія пузырно-влагалищныхъ свищей — 5; операцій заднепроходныхъ свищей — 3; операцій удаленія опухолей — 41; некротомій 5, резекцій 11, ампутацій 9; наложено гипсовыхъ и другихъ неподвижныхъ повязокъ при переломахъ, вывихахъ, ушибахъ и хроническихъ воспаленіяхъ — 90; операцій ущемленныхъ грыжъ — 2, операція вскрытія грудной полости (Thoracocentesis) — 1. Кромѣ того производились еще тенотоміи при косоглазіяхъ и искривленіяхъ конечностей, операціи водянки яичка и различныхъ суставовъ, операціи заворота и выворота вѣкъ и проч.

Занятія студентовъ въ клиникѣ были распредѣлены по той-же системѣ, какъ въ прошедшіе годы, и состояли: 1) въ изслѣдованіи стаціонарныхъ больныхъ, съ приложеніемъ всѣхъ современныхъ діагностическихъ пособій; 2) въ веденіи исторій болѣзней, по прочтеніи которыхъ въ общемъ собраніи слушателей въ аудиторіи студентомъ-практикантомъ по принадлежности, каждый отдѣльный случай подробно разбирался профессоромъ, при чемъ обращалось строгое вниманіе на то, чтобы исторія дѣйствительно представляла разборъ даннаго случая и не была бы выписана изъ руководствъ; 3) въ микроскопическихъ и химическихъ изслѣдованіяхъ болѣзненныхъ продуктовъ у больныхъ стаціонарныхъ и амбуляторныхъ; 4) въ упражненіяхъ въ изслѣдованіи внутренностей глаза, носа, уха и гортани; 5) въ производствѣ различныхъ операцій у больныхъ (катетеризмъ, извлеченіе зубовъ, вырѣзываніе опухолей, вскрытіе нарывовъ, наложеніе шва и т. п.); 6) въ произ-

водствѣ операцій на трупахъ, подъ руководствомъ профессора и въ повтореніи ихъ, при помощи ординатора; 7) въ наложеніи съемныхъ и неподвижныхъ повязокъ больнымъ стаціонарнымъ и амбуляторнымъ; 8) въ представленіи профессору амбуляторныхъ больныхъ, съ изложеніемъ краткой исторіи ихъ болѣзней, въ опредѣленіи рода болѣзни и назначеніи соотвѣтственнаго лѣченія; здѣсь-же слушатели упражнялись въ прописываніи рецептовъ, и 9) въ изученіи хирургическихъ инструментовъ, ихъ устройства, дѣйствія и практическаго приложенія.

Изъ наблюденій, опытовъ и изслѣдованій, произведенныхъ въ хирургической клиникѣ въ 1868 году, въ научномъ отношеніи наиболѣе замѣчательны слѣдующіе: 1) по примѣру прошедшихъ лѣтъ, удачными исходами подтверждено превосходство измѣненнаго проф. Грубе способа боковаго камнесѣченія и улучшеннаго имъ послѣдующаго лѣченія послѣ этой операціи; подробныя объ этомъ свѣдѣнія вскорѣ будутъ напечатаны въ одной изъ русскихъ медицинскихъ газетъ. 2) Во всѣхъ 32-хъ случаяхъ удаленія катаракты, по новѣйшему способу Грефе — линейнаго сѣченія (Extractio linearis cataractae) получены самые удовлетворительные результаты: зрѣніе возстановлено вполнѣ. Такіе исходы подтверждаютъ преимущество грефовскаго способа предъ всѣми другими, не говоря уже о томъ, что онъ менѣе тягостенъ для больныхъ. Въ числѣ оперированныхъ были нѣкоторые такіе, что при прежнихъ способахъ нельзя было и думать объ удаленіи катаракты, наприм., съ сильнымъ катаральнымъ пораженіемъ соединительной оболочки, съ реактивными припадками послѣ вывиха хрусталика и т. п. 3) Продолжались начатые въ прошедшіе годы опыты впрыскиванія различныхъ веществъ въ злокачественныя новообразованія, при чемъ добытые результаты сводятся къ тому, что самый способъ достаточно опасенъ и очень мало можно сказать пока въ его пользу. Къ тѣмъ-же убѣжденіямъ приходятъ мало-по-малу и дру-

гіе хирурги. 4) Изъ средствъ, рекомендованныхъ для очищенія воздуха въ палатахъ, подвергались опыту марганцовокислое кали, хлористый цинкъ, хлорноватистая известь и др.; но изъ всѣхъ опытовъ выведено заключеніе, что средства эти не могутъ замѣнить хорошей вентиляціи. 5) На основаніи предшествовавшихъ опытовъ проф. Грубе и другихъ хирурговъ, въ истекшемъ году, для очистки не только гноящихся ранъ, но и при операціяхъ для той-же цѣли употреблялась исключительно вода, въ видѣ орошеній, посредствомъ ирригаторовъ Эсмарха. При свѣжихъ раненіяхъ, холодная струя воды быстро свертываетъ кровь въ мелкихъ сосудахъ и тѣмъ останавливаетъ кровотеченія, нисколько не препятствуя первичному заживленію ранъ; губки же, дѣйствуя прижатіемъ, нерѣдко служатъ причиною гноенія ихъ, не говоря уже о другихъ свойствахъ губокъ, какъ напр. притягивать и удерживать въ своихъ порахъ гнилыя вещества, зародыши мельчайшихъ животныхъ и растеній, которые потомъ переносятся на рану. 6) По примѣру прошедшихъ лѣтъ, проф. Грубе научалъ слушателей самымъ упрощеннымъ способамъ производства операцій, такъ-какъ не всякій врачъ можетъ пользоваться такимъ обильнымъ запасомъ инструментовъ, какой имѣется въ хирургическомъ кабинетѣ; такъ, при удаленіи большихъ опухолей языка, употреблялись ножъ, лигатура и каленое желѣзо вмѣсто гальванокаустики. 7) При производствѣ кровавыхъ операцій, подвергались сравнительнымъ опытамъ различные способы: ножъ, сплошная лигатура, экразеръ, констрикторъ, гальванокаустика и прижигающія средства, и хотя въ большинствѣ случаевъ отдавалось преимущество ножу, тѣмъ не менѣе въ нѣкоторыхъ изъ нихъ другіе способы находили вполнѣ научныя показанія: такъ наприм. при удаленіи большихъ новообразованій въ гортани лучшее и, можно сказать, даже единственное средство составляетъ гальванокаустика; это подтверждаетъ и нижеописанный случай. 8) При

производствѣ кровавыхъ и другихъ болѣзненныхъ операцій, кромѣ общей анестезіи посредствомъ хлороформа, вновь подвергалось опыту мѣстное дѣйствіе эѳира, въ видѣ раздробленной ирригаціи, по способу Ричардсона. Этими опытами вполнѣ подтвердилось благодѣтельное болеутоляющее дѣйствіе эѳира. Не только множество мелкихъ операцій, какъ — извлеченіе зубовъ, вылущеніе небольшихъ опухолей, вскрытіе нарывовъ и проч., но даже и весьма объемистыя операціи могутъ быть произведены безболѣзненно; такъ, у очень чувствительной женщины изъ шейной области безболѣзненно была удалена опухоль величиною въ средній кулакъ. 9) Для кроваваго шва послѣ операцій и при лѣченіи случайныхъ раненій подвергался опыту различный матеріалъ, какъ-то: шелковыя, пеньковыя и льняныя нитки, серебряныя, желѣзныя и мѣдныя проволоки и т. п., при чемъ оказалось, что во многихъ случаяхъ, съ большою выгодой, можетъ быть употребленъ металлическій шовъ, хотя при наложеніи и снятіи его требуется извѣстный навыкъ; въ другихъ же случаяхъ преимущество осталось за шелковыми нитками. 10) При лѣченіи вывиховъ съ полнымъ успѣхомъ употреблялись простѣйшіе способы новѣйшаго изобрѣтенія (Шинцингера, Симона и др.). 11) При лѣченіи переломовъ подвергались опыту различные способы наложенія гипсовой повязки и, на основаніи ихъ, въ истекшемъ году оставлено употребленіе горячей воды для приготовленія гипсовой массы и она замѣнена холодною водой; это видоизмѣненіе, безъ сомнѣнія, важно для военнополевой хирургіи. Такая повязка, не уступая нисколько въ крѣпости, можетъ быть наложена съ большимъ удобствомъ, простотою и гораздо правильнѣе, чѣмъ при употребленіи горячей воды. Кромѣ того была испытана парафиновая повязка, рекомендованная англійскими хирургами. Результаты послѣднихъ опытовъ, въ видѣ отдѣльной статьи ординатора Анощенко, печатаются въ протоколахъ засѣданій харьковскаго ме-

дицинскаго общества. Достовѣрно то, что парафиновая повязка найдетъ свои показанія въ хирургіи. 12) Для перевязки ранъ, въ истекшемъ году была употребляема почти исключительно феновая кислота въ различномъ видѣ, растворенная въ водѣ и льняномъ маслѣ. На основаніи многихъ опытовъ, сдѣланныхъ въ хирургической клиникѣ въ 1868 году, можно вполнѣ подтвердить всѣ выхваляемыя качества феновой кислоты: свойства гноя улучшаются, грануляціи оживляются, гноеніе дѣлается меньше и нѣкоторыя раны заживаютъ поразительно быстро. Средство это прилагалось не только для перевязки гноящихся ранъ, но также и тамъ, гдѣ свѣжія раны назначались для заживленія вторичнымъ затяженіемъ (per secundam intentionem). Послѣ вылущенія опухолей, послѣ ампутацій и резекцій, при осложненныхъ переломахъ и т. п. рана тотчасъ покрывалась компрессомъ, смоченнымъ въ растворѣ феновой кислоты въ льняномъ маслѣ или водѣ. На основаніи этихъ опытовъ, проф. Грубе пришелъ къ нѣкоторымъ заключеніямъ, имѣющимъ практическій интересъ, а именно: a) феновая кислота, кромѣ драгоцѣннаго своего дезинфектирующаго дѣйствія, въ высшей степени имѣетъ еще общее всѣмъ кислотамъ свойство прижигать и раздражать поверхность раны; но такъ-какъ свойство это въ нѣкоторыхъ случаяхъ оказывается вреднымъ, то b) необходимо употреблять это средство, на основаніи показаній каждаго даннаго случая. По этому, при свѣжихъ раненіяхъ, проф. Грубе употребляетъ крѣпкіе растворы феновой кислоты въ льняномъ маслѣ (1 : 6 или 12); по прошествіи нѣсколькихъ дней, когда рана покрылась грануляціями, перевязка производится посредствомъ слабѣйшихъ растворовъ (1 : 30 или 40), если же рана представляется вялою, маложизненною, то употребляются растворы средней крѣпости (1 : 10). Вообще необращеніе вниманія на это качество феновой кислоты приноситъ вредъ. Рекомендованныя Листеромъ свинцовыя пластин-

ки не достигаютъ своей цѣли, такъ-какъ онѣ легко отстаютъ отъ поверхности тѣла. Гораздо цѣлесообразнѣе покрывать раны просто ватой, сверхъ компрессовъ съ феновой кислотой. Многослойность ваты не допускаетъ движенія свѣжаго воздуха. За-то листеровскія пластинки оказались полезными въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ во время самаго производства операціи необходимо избѣгать вступленія воздуха въ гнойную полость, какъ — при вскрытіи обширныхъ и глубокихъ, равно какъ и конгестивныхъ нарывовъ и проч. Въ подтвержденіе исчисленныхъ благодѣтельныхъ свойствъ феновой кислоты можно привести, напримѣръ, слѣдующіе случаи: а) больной съ раковиднымъ пораженіемъ нижней губы получилъ воспаленіе лимфатическихъ железъ въ подчелюстной области, послѣ чего образовался обширный нарывъ, занимавшій всю подчелюстную область лѣвой стороны и лѣвую сторону шеи. Послѣ первыхъ реактивныхъ припадковъ, больной быстро истощался отъ потрясающихъ ознобовъ и вечерней температуры тѣла въ 39° Ц. и болѣе; сна и аппетита не было. По вскрытіи нарыва и перевязкѣ раны по описанному способу, больной въ нѣсколько дней поправился, температура тѣла возвратилась къ нормальной, и не болѣе какъ въ полторы недѣли полость нарыва совершенно зажила. б) Больному съ костоѣдой стопы и нижняго окончанія голени была произведена ампутація по способу Сайме, при чемъ дудчатая кость была выскоблена внутри и весь костный мозгъ удаленъ на $1^1/_2$ дюйма отъ поверхности отпила. Сохраненныя мягкія части до-того были источены гнойными свищами, что не было никакой возможности наложить шовъ. Въ рану вложенъ компрессъ, смоченный маслянымъ растворомъ феновой кислоты (1: 6). Въ двѣ недѣли рана совершенно выполнилась и, почти безъ травматической лихорадки, больной вскорѣ совершенно выздоровѣлъ съ ногой вполнѣ годною для ходьбы (впослѣдствіи перевязки производились слабыми растворами 1 : 32 — 40).

в) У больнаго съ каріознымъ пораженіемъ стопы и всей голени произведена остеопластическая ампутація Грити. Не смотря на то, что сохраненная кожа въ нѣсколькихъ мѣстахъ была продыравлена гнойными свищами, былъ положенъ шовъ и рана перевязывалась по вышеписанному способу. Выздоровленіе больнаго, съ самою незначительною лихорадкой, подвигалось неимовѣрно быстро. Шесть недѣль спустя колѣнная косточка оказывалась уже совершенно приросшею на своемъ новомъ мѣстѣ, и больной хорошо ходилъ. Исчисленные случаи, равно какъ и множество другихъ подобныхъ, совершенно подтверждаютъ убѣжденіе англійскихъ хирурговъ, что феновая кислота открытыя раны какъ-бы превращаетъ въ подкожныя. Этимъ замѣчательнымъ дѣйствіемъ мы обязаны главнымъ образомъ ея дезинфектирующему свойству. — 13) Подвергались опыту различныя кровеостанавливающія средства и въ ряду ихъ преимущественно закручиваніе, лигатура и иглосдавливаніе. Этими опытами въ истекшемъ году подтверждено, что хотя, со введеніемъ акупрессуры, и съузился кругъ употребленія лигатуры, тѣмъ не менѣе послѣдняя едва-ли можетъ быть вытѣснена изъ употребленія.

Въ заключеніе слѣдуетъ упомянуть о чрезвычайно рѣдкомъ и замѣчательномъ случаѣ опухоли гортани. У мальчика 14 лѣтъ развился въ полости гортани жировикъ 7 ctm. въ большемъ, 4 ctm. въ меньшемъ діаметрѣ. Опухоль была удалена въ 1 сеансъ, посредствомъ гальванокаустической петли, особо для этой цѣли приспособленной. Больной, истощенный, малокровный, съ частыми припадками задушенія, послѣ операціи быстро выздоровѣлъ и въ скоромъ времени поправился въ общемъ состояніи. При осмотрѣ его, спустя два мѣсяца, трудно было отыскать даже слѣдъ бывшей опухоли: на мѣстѣ послѣдней (внутренняя поверхность корня надгортанника и лѣвая ложно-голосовая связка) остался едва замѣтный рубецъ. Голосъ больнаго былъ со-

вершенно правильный. По величинѣ и свойствамъ опухоли, по способу производства операціи и исходу ея, этотъ случай— единственный. Литература не представляетъ ничего подобнаго.

С. Въ *акушерской клиникѣ* въ теченіи 1868 года всѣхъ больныхъ и беременныхъ было 481. Изъ нихъ, приходящихъ за совѣтомъ было 333, а остальныя 148 были приняты въ клинику стаціонарными. Изъ 333 приходящихъ за совѣтомъ было: больныхъ женскими болѣзнями—276, больныхъ дѣтскими болѣзнями—57. Кромѣ того 15-ти дѣтямъ было произведено оспопрививаніе. Изъ 148 принятыхъ въ клинику было больныхъ женскими болѣзнями 102, беременныхъ 46. Девять беременныхъ оставили клинику до родовъ. Первороженицъ было 20. Многорожавшихъ — 26. Въ двухъ случаяхъ родились двойни. Всѣхъ новорожденныхъ было 38. Родилось живыми — 33; мнимоумершими — 3 (всѣ они были приведены къ жизни), мертвыми — 2. Одинъ изъ живорожденныхъ умеръ въ клиникѣ, на 9-й день послѣ рожденія, отъ атрофіи.

Особенныя пособія во время родовъ были слѣдующія: 1) въ 14 случаяхъ употреблено было хлороформированіе во время родовъ; 2) въ двухъ случаяхъ произведенъ поворотъ косолежавшаго младенца наружными ручными пріемами, а въ одномъ случаѣ наружно-внутреннимъ пріемомъ, по способу Брекстонъ-Гикса; 3) въ трехъ случаяхъ испытано выжиманіе плода, по способу Кристлера; 4) наложеніе щипцовъ произведено въ пяти случаяхъ; 5) въ двухъ случаяхъ было произведено выжиманіе послѣда, по способу Креде; 6) въ одномъ случаѣ было полное предлежаніе послѣда. Произведено было отдѣленіе его края отъ нижняго отдѣла матки и разрывъ плоднаго пузыря. Исходъ былъ благополучный для матери; младенецъ родился мнимоумершимъ и былъ приведенъ къ жизни по способу Сильвестра. Случай этотъ подробно описанъ въ докторской диссертаціи г. Манцевича «О предлежаніи послѣда». Харьковъ. 1868.

У больныхъ, принятыхъ въ клинику съ женскими болѣзнями, были слѣдующія болѣзни матки: зачаточное ея образованіе 1, смѣщеніе вверхъ 1, опущеніе 1, выпаденіе 5, наклоненіе впередъ 5, наклоненіе назадъ 9, перегибъ впередъ 9, перегибъ назадъ 1, съуженіе ея наружнаго отверстія 4, атрофія 1, перерощеніе влагалищной части 6, хроническое воспаленіе 19, острое воспаленіе 1, волокнистая подбрюшинная опухоль 1, промежуточная волокнистая опухоль 1, волокнистый полипъ 1, слизистый полипъ 1, ракъ 1, околоматочное кровеизліяніе 16, хроническое воспаленіе яичниковъ 8, кисты яичниковъ 5, отсутствіе мѣсячнаго очищенія 2, пузырно-рукавный свищъ 1, зернистое воспаленіе рукава 2, съуженіе рукава 1.

При изслѣдованіи больныхъ были употребляемы существующіе способы такъ, что каждый студентъ получалъ возможность научиться ихъ примѣненію. Каждый случай разбирался подробно и изображенъ въ видѣ схематическаго рисунка, дающаго приблизительное понятіе о величинѣ и о взаимномъ отношеніи частей. Отдѣленіе маточной и рукавной слизи изслѣдовалось микроскопически и химически. Въ послѣдней въ нѣсколькихъ случаяхъ наблюдаемы были вибріоны и трихомоны. Во многихъ случаяхъ примѣненъ былъ новый способъ изслѣдованія органовъ и тканей женскаго таза посредствомъ просвѣчиванія. О нѣкоторыхъ изъ этихъ случаевъ упомянуто въ статьѣ проф. Лазаревича «Діафаноскопія». Съ необыкновенною пользою во многихъ случаяхъ испытано было дѣйствіе іодовой настойки употребляемой въ видѣ пульверизаціи, или намазываніемъ влагалищной части матки, или впрыскиваніемъ въ полость послѣдней.

Въ теченіи года производимы были слѣдующія оперативныя дѣйствія:

Выпрямленіе матки зондомъ 22 раза, расширеніе маточнаго отверстія ляминаріей и сжатою губкою 6 (сжатая губка приготовлялась особеннымъ способомъ: она пропитывалась концен-

трированнымъ растворомъ kali hypermanganici и аравійской камеди, а снаружи обволакивалась слоемъ той-же камеди); кровавое расширеніе маточнаго отверстія 4, кровавое расширеніе рукава 1, прижиганіе матки химическими средствами 12, прижиганіе матки раскаленнымъ желѣзомъ 1, отнятіе полипа матки 2, отнятіе утолщенной влагалищной части матки 2, введеніе внутри-маточнаго пессарія 3, поддержаніе матки подъемцемъ 6.

24. На основаніи проекта, составленнаго совѣтомъ университета, по соглашенію съ харьковскою губернскою земскою управою въ 1867 году, 14 марта 1868 года открыты при *губернской земской больницѣ* два клиническихъ отдѣленія—одно для глазныхъ болѣзней, а другое для болѣзней мочеполовыхъ органовъ, по 20 кроватей въ каждомъ,—поступившія въ завѣдываніе профессора по каѳедрѣ теоретической хирургіи Зарубина. Всѣхъ больныхъ, пользованныхъ въ нихъ въ теченіи года со дня открытія, было 88, именно—мужескаго пола 59 и женскаго 29. Это количество больныхъ раздѣлялось по клиническимъ отдѣленіямъ слѣдующимъ образомъ: съ сифилитическими болѣзнями было 57 (мужчинъ 28, женщинъ 29), съ болѣзнями мочевыхъ и половыхъ органовъ 6 (мужчинъ), съ глазными болѣзнями 25 (мужчинъ). Изъ этихъ больныхъ выздоровѣло 55, получили значительное облегченіе 4, умерло 1, оставалось въ больницѣ 28. По случаю совершеннаго недостатка больныхъ, 10 кроватей въ глазной женской палатѣ оставались все время незанятыми. Операцій, не считая маловажныхъ, напр. подкожныхъ инъекцій, вскрытія нарывовъ, инокуляцій, было произведено 8, а именно: вырѣзываніе камня изъ мочеваго пузыря (lithotomia lateralis) 1, операція стриктуры мочеиспускательнаго канала по способу Гольта — 1, amputatio preputii — 2, операція заворота вѣкъ — 2, извлеченіе катаракты (extractio segmenta-

lis) 1, извлеченіе омертвѣвшей кости (extractio sequestri) 1. Всѣ операціи имѣли благопріятный исходъ.

Изъ сдѣланныхъ въ клиническихъ отдѣленіяхъ наблюденій, опытовъ и изслѣдованій, наиболѣе замѣчательныхъ въ научномъ отношеніи, заслуживаютъ упоминанія: a) случайное наблюденіе надъ вліяніемъ рожистаго воспаленія на ходъ сифилитическихъ пораженій, b) опыты надъ дѣйствіемъ карболевой кислоты на заживленіе сифилитическихъ язвъ, c) надъ дѣйствіемъ подкожныхъ впрыскиваній сулемы на конституціональный сифилисъ, d) сравнительныя наблюденія надъ дѣйствіемъ сулемы, принимаемой внутрь, и втираній меркуріальной мази, при сифилитическихъ пораженіяхъ кожи и слизистыхъ оболочекъ, e) надъ вліяніемъ іодистаго калія на кондиломы, f) надъ дѣйствіемъ глауберовой соли и каломели въ порошкѣ при помутнѣніяхъ роговой оболочки глазъ, g) надъ дѣйствіемъ сулемы при воспаленіи сосудистой оболочки глазъ. Результаты этихъ опытовъ и наблюденій будутъ изложены подробно въ приготовляемомъ проф. Зарубинымъ къ печати отчетѣ. Опредѣленный къ клиническимъ отдѣленіямъ стипендіатъ медицинскаго факультета лѣкарь Порай-Кошицъ занимался изученіемъ свойствъ сифилитическаго яда и съ этою цѣлью предпринималъ различные опыты прививанія сифилитическаго и обыкновеннаго гноя, результаты которыхъ будутъ составлять предметъ его диссертаціи на степень доктора медицины.

Слѣдующіе клиническіе случаи представляли особенный интересъ: 1) случай камня въ мочевомъ пузырѣ, замѣчательный по затрудненіямъ, которыя неожидано представились при извлеченіи его; 2) въ одномъ случаѣ tuberculosis testiculi получила весьма благопріятный ходъ при употребленіи іодистаго желѣза, рыбьяго жира и питательной пищи; 3) случай съуженія мочеиспускательнаго канала, существовавшаго болѣе 12 лѣтъ, излѣченный въ короткое время расширеніемъ по способу Гольта;

4) случай сифилитическаго воспаленія радужной оболочки, которое, не смотря на специфическое лѣченіе, очевидно уничтожавшее другіе припадки сифилиса, внезапно рецидивировало нѣсколько разъ то на одномъ, то на другомъ глазѣ; 5) случай чрезвычайнаго остраго гнойнаго воспаленія роговой оболочки, съ прободеніемъ ея, окончившагося благополучно при единственномъ мѣстномъ употребленіи атропина; 6) два случая сомнительнаго сифилиса: въ одномъ былъ діагностированъ просто маразмъ и чахотка, въ другомъ eczema и prurigo отъ неопрятности; въ первомъ вскрытіе трупа подтвердило распознаваніе, а въ другомъ — мягчительныя ванны быстро уничтожили всѣ накожныя страданія.

Такъ-какъ госпитальныя клиническія отдѣленія находятся довольно далеко отъ города, то посѣщеніе ихъ не было обязательнымъ для студентовъ. По-временамъ, особенно при накопленіи наиболѣе интереснаго матеріала, студенты были приглашаемы профессоромъ для обозрѣнія клиническихъ отдѣленій и практическаго ознакомленія съ тѣми болѣзнями, о которыхъ они слышали на лекціяхъ теоретической хирургіи. При этомъ проф. Зарубинъ считаетъ пріятною для себя обязанностью засвидѣтельствовать, что каждый разъ они являлись въ клиническія отдѣленія съ большою охотою. Кромѣ обозрѣнія клиническихъ больныхъ, студенты упражнялись въ офтальмоскопическомъ изслѣдованіи глазныхъ болѣзней. Въ прошломъ полугодіи одинъ изъ нихъ, Башинскій, посѣщалъ клиническія отдѣленія почти постоянно и занимался преимущественно офтальмоскопіею. Въ присутствіи студентовъ были производимы операціи.

На ассигнованныя совѣтомъ университета 100 рублей для пріобрѣтенія необходимыхъ при практическомъ преподаваніи въ упомянутыхъ отдѣленіяхъ пособій было пріобрѣтено у коммиссіонера Эдельберга 40 нумеровъ разныхъ инструментовъ и ап-

паратовъ. Изъ нихъ наиболѣе замѣчательны: ящикъ съ инструментами Гольта, ларингоскопъ съ освѣтительнымъ аппаратомъ, наборъ глазныхъ инструментовъ, англійскій отоскопъ.

25. Въ *музеѣ изящныхъ искусствъ* къ 1 января 1868 года числилось 1860 предметовъ. Въ теченіи прошлаго года поступило 23 предмета, такъ-что къ 1 января 1869 года состоитъ на-лицо всего 1883 предмета. Музей, на основаніи установленныхъ для этого учрежденія правилъ, былъ открытъ для публики по воскресеньямъ.

26. Въ *собраніи монетъ и медалей* къ 1 января 1869 года числится 22103 экземпляра.

Въ университетской *типографіи* въ теченіи 1868 года печатались:

Періодическія изданія: a) Харьковскія епархіальныя вѣдомости; b) Циркуляры по харьковскому учебному округу, и c) Протоколы засѣданій совѣта харьковскаго университета и приложенія къ нимъ.

Сверхъ того напечатаны:

Проф. *М. Петрова*, Очерки изъ всеобщей исторіи.

Я. Баляснаго, Пять лѣтъ изъ исторіи харьковскаго университета. Воспоминанія профессора Роммеля о своемъ времени, о Харьковѣ и харьковскомъ университетѣ.

Памятная книжка харьковской губерніи на 1868 годъ.

Журналы экстренныхъ земскихъ собраній харьковскаго уѣзда въ ноябрѣ и декабрѣ 1867 года.

Журналы очереднаго земскаго собранія харьковскаго уѣзда въ маѣ мѣсяцѣ 1868 года.

Л. Ровскаго, Опытъ элементарнаго руководства ариѳметики для народныхъ училищъ. Курсъ 1-й.

Л. Гиршмана, Матеріалы для физіологіи цвѣтоощущенія.

А. Кузнецова, Матеріалы для исторіи развитія кожи.

J. Lazarewitch, Diaphanoscopie ou exploration par transparence.

Л Манцевича, О предлежаніи послѣда (De placenta praevia).

П. Ясинскаго, Къ ученію о строеніи дѣтскаго мѣста.

Д. Котелевскаго, Къ ученію о судебно-медицинскомъ вопросѣ—родился младенецъ живымъ или мертвымъ.

А. Дудукалова, Наблюденія и опыты надъ возстановленіемъ костнаго небнаго свода.

И. Вилкомирскаго, О хилопластикѣ.

Его-же, Объ оваріотоміи.

Кромѣ того печатались Правила для студентовъ, Обозрѣніе преподаваній въ университетѣ, разные тезисы для публичнаго защищенія и другія мелкія статьи.

Эти изданія, взятыя въ одномъ экземплярѣ, заключаютъ въ себѣ 365 лист., всѣ же въ совокупности составляютъ 256.748 печатныхъ оттисковъ. Разныхъ бланковъ, таблицъ, аттестатовъ и проч. набрано $289^1/_4$ лист., напечатано 55.591 экземпл.; а всего сочиненій и бланковъ набрано $654^1/_4$ лист. напечатано 312.339 оттисковъ.

Расходъ: a) содержаніе управляющему типографіею, фактору и рабочимъ 4368 р. 78 к., b) нижнимъ служителямъ 196 р. 4 к., c) типографскіе матеріалы, билетъ на типографію и проч. 182 р. 51 коп. Итого 4747 р. 33 коп.

Доходъ: a) за напечатаніе сочиненій на счетъ казны 1286 р. $93^3/_4$ коп., b) за сочиненія, бланки и другія работы для постороннихъ вѣдомствъ и лицъ 4130 р. 54 коп.; итого 5417 р. $57^3/_4$ коп. Чистаго дохода 670 р. $24^3/_4$ коп. Сверхъ того, для университета и канцеляріи попечителя харьковскаго учебнаго округа напечатано безплатно — дипломовъ, аттестатовъ, свидѣтельствъ, канцелярскихъ бланковъ, разныхъ таблицъ, списковъ и проч. на 901 р. 20 коп. сер.

МОНОГРАФІЯ УЧЕНІЯ О ПРИТЯЖЕНІИ

И ТЕОРІЯ ПОТЕНЦІАЛОВЪ.

Приватъ-Доцента *В. А. Алексѣева.*

—

Идея о взаимномъ дѣйствіи тѣлъ природы смутно проявлялась у многихъ ученыхъ еще древняго міра, но только Ньютонъ впервые внесъ въ науку понятіе о взаимномъ притяженіи тѣлъ; изъ его трудовъ оно можетъ быть формулировано въ слѣдующія положенія.

Сила, съ которою планеты притягиваются солнцемъ, дѣйствуетъ обратно пропорціонально квадрату разстоянія ихъ отъ солнца и во всѣхъ пунктахъ орбиты подчинена одному и тому-же закону. Эта сила, проявляемая общею массою земли, планетъ, солнца, происходитъ отъ притяженія, свойственнаго каждой частицѣ матеріи, и между самыми частицами она такъ-же дѣйствуетъ обратно пропорціонально квадрату разстояній. Вліяніе земли на луну подчинено тому-же закону, и дѣйствующая сила тождественна съ силою тяжести.

Первое изъ положеній Ньютона, по его собственному замѣчанію, было найдено, независимо другъ отъ друга, Вреномъ, Гукомъ и Галлеемъ.

Развитіе всей небесной механики, въ ея современномъ состояніи, служитъ подтвержденіемъ положенія Ньютона о взаим-

номъ тяготѣніи небесныхъ тѣлъ. Дѣйствіе силы притяженія обратно-пропорціонально квадрату разстояній въ предѣлахъ солнечной системы и не подлежитъ ни малѣйшему сомнѣнію. Новая наука даже далеко раздвинула этотъ предѣлъ; взаимное движеніе двойныхъ звѣздъ: γ Дѣвы, ζ Геркулеса, α Близнецовъ, ξ Большой Медвѣдицы, δ Короны — вычислены по этому закону и, по словамъ Литрова, довольно согласны съ наблюденіями. Изслѣдованія Бесселя о годовомъ параллаксѣ 61 звѣзды Лебедя еще болѣе подтверждаютъ высказанное положеніе. Для тѣлъ, находящихся на земной поверхности, законъ дѣйствія силы притяженія подтвержденъ опытами Маскелини, Кавендиша, Карлина и изслѣдованіями надъ плотностію земли Рейха, Бенли, Айри и другихъ. Относительно одного только изъ положеній Ньютона проявилось въ послѣднее время нѣкоторое сомнѣніе, вслѣдствіе наблюденій Бесселя. По изслѣдованіямъ Бесселя, масса Юпитера, если ее вычислять на основаніи возмущеній, производимыхъ ею въ Сатурнѣ, равна $\frac{1}{1070}$ массы солнца, между тѣмъ масса той-же планеты, если ее вычислять на основаніи возмущеній, производимыхъ ею въ движеніи Юноны и Паллады, равна $\frac{1}{1045}$ массы солнца. Этотъ фактъ далъ право Бесселю высказать замѣчаніе, что если дальнѣйшія опытныя изслѣдованія подтвердятъ разницу, то мы будемъ приведены къ необходимости допустить, что притяженія между планетами нѣсколько различны между собою.

Примѣненіе законовъ дѣйствія силы притяженія не ограничивается только явленіями космическаго притяженія. Не смотря на всю разницу между явленіями космическаго и электрическаго притяженія, оказалось, что законъ измѣненія силы обратно пропорціонально квадрату разстояній имѣетъ мѣсто и въ электрическихъ явленіяхъ притяженія. Положеніе это подтверждено

опытами Кавендиша, Робинзона и въ-особенности Кулона. Справедливость приложенія разсматриваемаго закона для притяженія магнитовъ подтверждаютъ изслѣдованія Гауса и опыты Кулона.

Огромное приложеніе законовъ дѣйствія силы притяженія къ объясненію различныхъ явленій природы естественно привело къ мысли — не обладаетъ ли этотъ законъ такимъ общимъ характеромъ, что при его помощи могутъ быть объяснены и другія отдѣлы явленій — свѣтъ, упругость, теплота? Вопросъ — пока совершенно не разрѣшенный. Между тѣмъ возможность полученія, изъ однихъ и тѣхъ-же началъ, объясненія явленій упругости и распространенія теплоты привела Ламе и его послѣдователей къ заключенію положить въ основаніе объясненія всѣхъ силъ и явленій природы свойства упругости вещества, и онъ даже сдѣлалъ смѣлое гипотетическое заключеніе, что законъ космическаго притяженія есть послѣднее звено явленій упругости, когда разстоянія между элементами изъ безконечно-малыхъ переходятъ въ конечныя. Конечно, мы не имѣемъ данныхъ, по которымъ могли бы утверждать, что законъ космическаго притяженія можетъ лечь въ основаніе объясненія перехода всѣхъ физическихъ силъ одной въ другую, но упругость, кажется, представляетъ ихъ еще менѣе.

Разсматривая законъ дѣйствія силы притяженія даже въ видѣ частнаго начала, приложенія его такъ обширны, что на всѣ стороны изслѣдованія его проявленій было обращено серьезное вниманіе еще со временъ Ньютона. Построить общія аналитическія выраженія, на основаніи началъ механики, для опредѣленія дѣйствія притяженія тѣлъ, всевозможныхъ геометрическихъ формъ и плотности, при всевозможныхъ измѣненіяхъ разстояній между ними, составляло одну изъ важнѣйшихъ задачъ науки. Ньютонъ разрѣшилъ ее, на основаніи законовъ механики только для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ притяженія, именно — для шаровыхъ и эллипсоидальныхъ обертокъ.

Стремленіе Маклорена, Даламбера, даже Лагранжа, обобщить рѣшеніе вопроса не привело къ существенно важнымъ результатамъ. — Попытка Лежандра разрѣшить вопросъ, при помощи особаго метода, была также неудачна. Только Лапласъ положилъ прочное основаніе ученію о притяженіи сфероидовъ вообще. Онъ первый нашелъ общія аналитическія выраженія для ихъ притяженія, выраженія слагающихъ на частицы, лежащія внѣ и внутри ихъ. Однако полученіе окончательнаго рѣшенія, по методу Лапласа, зависитъ отъ интеграціи выраженій, которая точно можетъ быть совершена только въ одномъ частномъ случаѣ, именно — когда данный сфероидъ представляетъ эллипсоидъ вращенія. Такой результатъ заставилъ обратиться Лапласа къ другому пріему: онъ далъ прекрасный методъ для преобразованія одной системы координатъ въ другую и такимъ путемъ старался придти къ точно интегрируемымъ выраженіямъ. Къ сожалѣнію, онъ не нашелъ критеріума, которымъ можно было бы руководиться при выборѣ новой системы, съ увѣренностію получить въ новой формѣ выраженія интегрируемыя. — Тогда только Лапласъ обратился къ изслѣдованію интеграціи при помощи рядовъ и пришелъ къ построенію теоріи шаровыхъ функцій. — При своихъ изслѣдованіяхъ, Лапласъ, между прочимъ, пришелъ къ одному весьма важному положенію по проистекающимъ изъ него слѣдствіямъ. Онъ нашелъ, что опредѣленіе величины напряженія притяженія, слагающихъ, по всѣмъ направленіямъ, вполнѣ зависитъ отъ опредѣленія нѣкоторой функціи, называемой *потенціаломъ*, и что для частицъ и тѣлъ, находящихся *внѣ притягивающаго тѣла*, потенціалъ удовлетворяетъ уравненіе въ частныхъ дифференціалахъ такого вида: сумма вторыхъ частныхъ производныхъ отъ потенціала, относительно координатъ притягиваемой частицы, всегда равна нулю. Пуассонъ построилъ уравненіе для того случая, когда притягиваемая частица находится *внутри* дѣйствующаго на нее

тѣла. Гаусъ обнялъ вопросъ во всей полнотѣ и вывелъ уравненія, которымъ долженъ удовлетворять потенціалъ, при всевозможныхъ положеніяхъ притягивающей частицы, т. е. внутри, внѣ и даже на самой поверхности притягивающаго тѣла.

Полученіе уравненій, удовлетворяющихся потенціаломъ, совершенно измѣнило характеръ изслѣдованія вопроса о притяженіи; самое опредѣленіе потенціала стало почти вопросомъ чистаго анализа, — нужно было разрѣшить дифференціальное уравненіе 2-го порядка даннаго вида. Ламе, Веберъ, Лежень-Дирехле, Лапласъ (которыхъ изслѣдованія приведены въ настоящей монографіи), дали искомое рѣшеніе при помощи разложенія по шаровымъ функціямъ.

Хотя Лапласъ первый нашелъ общее выраженіе для притяженія эллипсоидовъ, но изъ нихъ не вытекали очевидно законы этого притяженія; Шаль пополнилъ этотъ пробѣлъ и достигъ результата весьма легкимъ и изящнымъ пріемомъ. — Должно замѣтить, что изслѣдованія Шаля отличаются совершенно частнымъ характеромъ; тѣмъ не менѣе они занимаютъ важное мѣсто въ исторіи разсматриваемаго вопроса.

Опытныя изслѣдованія явленій электричества уже давно привели Кулона къ заключенію, что сила притяженія наэлектризованнаго, *внутри наполненнаго* веществомъ, шара совершенно одинакова съ силою наэлектризованнаго шара, *внутри пустаго*. Этотъ фактъ привелъ къ вопросу объ изслѣдованіи притяженія аналитическимъ путемъ для того случая, когда допустимъ, что дѣйствователь притяженія распространенъ не по всему объему даннаго тѣла, но только по его поверхности. — Пуассонъ, Гринъ и Гаусъ вполнѣ разрѣшили этотъ вопросъ. Гаусъ доказалъ даже, со всею математическою точностію, что для всякаго распредѣленія массы по объему тѣла существуетъ соотвѣтствующее распредѣленіе по поверхности и притомъ *только одно*. Къ сожалѣнію, самое распредѣленіе массъ по поверхно-

Пусть x, y, z прямоугольныя, прямолинейныя координаты элемента dm; a, b, c соотвѣтствующія координаты $d\mu$; назовемъ объемъ элемента массы dm чрезъ dv; плотность означимъ чрезъ D; будемъ имѣть:

$$dv = dx.\ dy.\ dz,$$

$$dm = D.\ dv = D.\ dx.\ dy.\ dz.$$

Допустимъ, что масса притягиваемаго элемента $d\mu$ равна единицѣ и подставимъ выведенное выраженіе для dm въ значеніе F_1, получимъ:

$$F_1 = D.\ f(r)\ dx.\ dy,\ dz,$$

второй видъ выраженія притяженія *одной изъ частицъ тѣла, масса котораго M.*

Притяженіе суммы всѣхъ частицъ, входящихъ въ составъ массы M, если назовемъ его чрезъ F, очевидно выразится формулою:

$$F = \iiint D.\ f(r)\ dx.\ dy,\ dz,$$

гдѣ интегрированіе должно быть совершено въ предѣлахъ всего разсматриваемаго тѣла, допуская его сплошнымъ. Если предѣлы для x: $x = a_1$, $x = a_2$; для y: $y = b_1$ $y = b_2$; для z: $z = c_1$ и $z = c_2$, то

$$F = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} D.\ f(r)\ dx.\ dy.\ dz. \qquad (1)$$

Выраженіе

$$dm = Ddv = Ddx.\ dy.\ dz$$

мы получили, относя притягивающее тѣло къ прямолинейной и прямоугольной системѣ координатъ. Отнесемъ данное тѣло къ системѣ координатъ полярныхъ.

Примемъ начало координатъ O прямолинейной системы за начало координатъ системы полярной (черт. I); проведемъ рядъ плоскостей чрезъ O и ось Z; онѣ разсѣкутъ тѣло на отрѣзки вида $COML$. Допустимъ, что описанъ рядъ прямыхъ ко-

нусовъ около оси Z изъ вершины O, пересѣченіе ихъ съ отрѣзками вида $COML$ образуетъ пирамиды $OSPQ$. Наконецъ, вообразимъ рядъ концентрическихъ шаровъ, описанныхъ изъ O, какъ центра, пересѣченіе этихъ шаровъ съ пирамидами подобными $OSPQ$ разобьетъ все тѣло на полярные элементы вида psqt.

Назовемъ углы $XOL = \phi$, $COP = \theta$, $Op = r$

$LOM = \partial\phi$, $POQ = \partial\theta$, $pt = \partial r$

Разсматривая элементъ pqst какъ параллелепипедъ, найдемъ, что объемъ его равенъ:

$$r^2 \, Sin \, \theta \partial\theta \, \partial\phi \, \partial r,$$

слѣдовательно выраженіе для силы притяженія F_1 приметъ видъ:

$$F = D f(r) r.^2 \, Sin \, \theta \partial\theta \, \partial\phi \, \partial r$$

значеніе силы притяженія элемента pqst на точку, лежащую внѣ его на разстояніи r.

Выраженіе силы притяженія всего тѣла M на матеріальную частицу, лежащую внѣ его, означая предѣлы интеграціи его объема:

$$\phi = 0 \text{ и } \phi = 2\pi,$$

$$\theta = 0 \text{ и } \theta = \frac{\pi}{2},$$

$$r = 0 \text{ и } r = a,$$

Приметъ видъ

$$F = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a D. \, f(r) r^2 \, Sin \, \theta \partial\theta \, \partial\phi \, \partial r, \qquad (2)$$

Въ выраженіяхъ (1) и (2) величину D можно разсматривать *постоянной* или *перемѣнной;* когда D величина постоянная, они могутъ быть упрощены:

$$F = D \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(r) \, \partial x. \, \partial y. \, \partial z$$

выраженіе притяженія даннаго тѣла въ координатахъ прямолинейныхъ;

$$F = D\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} f(r)r^2\, Sin\,\theta d\theta.\, d\varphi.\, dr$$

выраженіе того-же притяженія въ координатахъ полярныхъ, *при постоянной плотности.*

Вмѣсто введенныхъ нами координатъ можно взять всякую другую систему, пріемъ для измѣненія ихъ остается тотъ-же; впослѣдствіи изложимъ возможныя упрощенія. Формулы (1) и (2) имѣютъ мѣсто какова бы ни была зависимость закона притяженія отъ разстоянія между данными тѣлами.

§ 2. Изъ выраженія притяженія даннаго тѣла:

$F = \iiint D.\, f(r)\, dx.\, dy.\, dz$, опредѣлимъ его слагающія.

Назовемъ чрезъ x, y, z перемѣнныя координаты точекъ даннаго тѣла; a, b, c пусть координаты точки притягиваемой, r разстояніе между ними, оно равно:

$$r = \left\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\right\}^{1/2}.$$

Косинусы угловъ, которые, направленіе притяженія, линія r составляетъ съ осями координатъ выразятся формулами:

$$Cos\,(rx) = \frac{x-a}{r},\quad Cos\,(r.y) = \frac{y-b}{r},\quad Cos\,(rz) = \frac{z-c}{r}.$$

Если назовемъ слагающія дѣйствующей силы притяженія параллельныя осямъ координатъ чрезъ X, $У$, Z, то для опредѣленія ихъ получимъ выраженія:

$$\left.\begin{aligned} X &= F.\, Cos\,(rx) = \iiint\left(\frac{x-a}{r}\right) D.\, f(r)\, dx.\, dy.\, dz,\\ У &= F.\, Cos\,(ry) = \iiint\left(\frac{y-b}{r}\right) D.\, f(r)\, dx.\, dy.\, dz,\\ Z &= F.\, Cos\,(rz) = \iiint\left(\frac{z-c}{r}\right) D.\, f(r)\, dx.\, dy.\, dz. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Предѣлы интегрированія въ этихъ выраженіяхъ должны обнимать собою все разсматриваемое тѣло.

Пусть $\varphi(r)$ такая функція r, для которой $f(r)$ представляетъ дифференціальный коефиціентъ, т. е.

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} = f(r),$$

и пусть также:

$$U = \iiint D.\, \varphi(r)\, dx.\, dy, dz, \qquad (4)$$

при чемъ, по предъидущему, интеграція должна быть распространена на всѣ элементы притягивающаго тѣла.

При сдѣланныхъ допущеніяхъ имѣемъ:

$$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial a} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial a} = f(r)\frac{\partial r}{\partial a} = -f(r)\frac{x-a}{r}; \qquad (5)$$

слѣдовательно:

$$X = -\iiint D.\frac{\partial \varphi(r)}{\partial a} dx.\, dy.\, dz$$

$$= -\frac{\partial}{\partial a}\iiint D.\, \varphi(r)\, dx.\, dy.\, dz.$$

Принимая во вниманіе значеніе U, получимъ

$$X = -\frac{\partial U}{\partial a}.$$

Подобнымъ путемъ найдемъ:

$$Y = -\frac{\partial U}{\partial b}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial c}.$$

(IV) Полагая $V = -U$, получимъ

$$X = \frac{\partial V}{\partial a}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial b}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial c}. \qquad (6)$$

И такъ, отсюда видимъ, что *слагающія ускорительной силы притяженія, дѣйствующей пропорціонально массамъ данныхъ тѣлъ и нѣкоторой функціи разстоянія между ними, выражаются частными производными функціи* V, *опредѣляемой уравненіями (4) и (IV). Функція* V *носитъ на-*

званіе функціи потенціала или просто потенціала, она введена въ анализъ Гриномъ.

Гаусъ, въ своемъ превосходномъ изслѣдованіи по теоріи притяженія [1], ограничивается разсмотрѣніемъ законовъ его, только для того случая, когда оно дѣйствуетъ пропорціонально массамъ и обратно пропорціонально квадратамъ разстоянія.

Сообразно съ этимъ, онъ называетъ потенціаломъ такую функцію, *частныя производныя которой представляютъ слагающія силы притяженія, дѣйствующей обратно пропорціонально квадратамъ разстоянія.* Пирсъ [1], Томсонъ [2], Тодгунтеръ [3] и другіе изслѣдователи придаютъ термину «потенціалъ» болѣе обширный смыслъ, указанный предъ этимъ.

Потенціалъ V допускаетъ физическое опредѣленіе, независимо отъ какой бы то ни было системы координатъ, прямолинейной или полярной, помощію которой опредѣляется положеніе частицъ притягивающаго тѣла. Сверхъ того, хотя въ предъидущихъ изслѣдованіяхъ мы полагали, что притягиваемая частица существуетъ матеріально, однако функція V имѣетъ опредѣленное значеніе, зависящее *только* отъ *положенія въ пространствѣ* притягиваемой частицы $d\mu$, несмотря на то, существуетъ ли на самомъ дѣлѣ эта частица матеріально или нѣтъ. Слѣдовательно, функція V можетъ имѣть опредѣленное значеніе для каждой *точки пространства, независимо отъ вопроса — находится ли въ томъ мѣстѣ матерія или нѣтъ.*

§ 3. Потенціалъ V, какъ мы видѣли, даетъ весьма легкое

---

[1] Théorèmes généraux sur les forces attractives et répulsives qui agissent en raison inverse du carré des distances, Liouville, Journal de Mathèmatique. T. 7-me.

[1] Physical and celestial Mechanics, by Beniamin Peirce. Boston. 1855.

[2] Treatise on Natural Philosophy, *Thomson.* 1866.

[3] Analytical statics, *Todhunter.* 1856.

средство находить аналитическое выраженіе слагающихъ притяженія параллельныхъ осямъ координатъ; *опредѣлимъ аналитическое выраженіе притяженія по направленію какой бы то ни было линіи*, а равнымъ образомъ и выраженіе самой равнодѣйствующей, какъ функціи потенціала.

Пусть F равнодѣйствующая притягивающихъ силъ, дѣйствующихъ по извѣстному данному закону; α, β, γ углы, которыхъ направленіе этой равнодѣйствующей составляетъ съ осями координатъ, V соотвѣтствующій разсматриваемой силѣ потенціалъ; слагающія параллельныя осямъ координатъ выразятся формулами

$$X=F\ \mathrm{Cos}\ \alpha=\frac{\partial V}{\partial x},\quad Y=F\ \mathrm{Cos}\ \beta=\frac{\partial V}{\partial y},\quad Z=F\,\mathrm{Cos}\,\gamma=\frac{\partial V}{\partial z},$$

отсюда:

$$X^2+Y^2+Z^2=F^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

или,

$$F=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2},$$

выраженіе равнодѣйствующей какъ функціи потенціала.

Для опредѣленія слагающей по произвольному направленію, допустимъ, что ds одинъ изъ элементовъ этого направленія, прямой или кривой линіи, по которой ищемъ слагающую; въ этомъ случаѣ $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial z}{\partial s}$ углы, которые разсматриваемое направленіе составляетъ съ осями координатъ. Пусть θ уголъ, составляемый равнодѣйствующею притяженія съ направленіемъ элемента ds, очевидно, будемъ имѣть:

$$Cos\ \theta=\frac{\partial x}{\partial s}Cos\ \alpha+\frac{\partial y}{\partial s}\ \mathrm{Cos}\ \beta+\frac{\partial z}{\partial s}\ Cos\ \gamma,$$

или,

$$F\ Cos\ \theta=\frac{\partial x}{\partial s}\ F\,Cos\ \alpha+\frac{\partial y}{\partial s}\ F\,Cos\,\beta+\frac{\partial z}{\partial s}\ F\ \ Cos\ .$$

Подставимъ вмѣсто $F\ Cos\ \alpha$, $F\ Cos\ \beta$, $F\ Cos\ \gamma$ ихъ выраженія изъ уравненій (9) найдемъ:

$$F\,Cos\,\theta = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \frac{dV}{ds},$$

величина слагающей всего притяженія даннаго тѣла, по произвольному направленію, составляющему съ равнодѣйствующей уголъ θ, выраженная при помощи функціи V.

§ 4. Изслѣдуя характеръ и свойства функціи потенціала, Гаусъ замѣтилъ, что поверхность, заключающая всѣ точки, для которыхъ V величина постоянная, очевидно отдѣляетъ части пространства, въ которыхъ V *меньше* данной, постоянной величины, отъ тѣхъ частей пространства, для которыхъ V больше этой величины. Если допустимъ, что линія s вся заключается на этой поверхности, или только касается ея элементовъ ds, то

$$\frac{dV}{ds} = 0,$$

слѣдовательно:

$$F\ Cos\ \theta = 0, \text{ или, } Cos\ \theta = 0,$$

предполагая, конечно, что F не равно нулю, т. е. части дѣйствующей силы не уничтожаются взаимно. Отсюда слѣдуетъ, что *равнодѣйствующая притяженія нормальна къ каждой точкѣ разсматриваемой поверхности; эту поверхность Гаусъ называетъ поверхностію уровня.*

Stockes[1] доказываетъ, что *если s нѣкоторая замкнутая поверхность, лежащая внѣ притягиваемой частицы, ds одинъ изъ элементовъ этой поверхности, dn элементъ нормальной къ ds, то*

$$\int \frac{dV}{dn}\,ds = 0,$$

[1] Cambridge and Dublin Mathematical Journal, t. 4. Analitical statics, *Todhunter*, ст. 285—288.

причемъ интегралъ долженъ быть распространенъ на всю поверхность, и, на основаніи своего доказательства, оправдываетъ другую не менѣе важную теорему.

Пусть m' масса притягиваемой частицы, лежащей въ P', при чемъ предположимъ, что P' находится внѣ s. Проведемъ чрезъ P' прямую L, пересѣкающую поверхность s, и продолжимъ ее неопредѣленно по направленію отъ P'. Линія L вообще пересѣчетъ поверхность въ двухъ точкахъ, за исключеніемъ только того случая, когда поверхность s возвратная (re-entrant), въ этомъ предложеніи число точекъ пересѣченія будетъ равно 2, 4, 6 или другому, но непремѣнно *четному* числу. Означимъ точки пересѣченія поверхности и прямой по порядку чрезъ P_1, P_2, P_3,..., гдѣ P_1 точка, лежащая ближе другихъ къ P'. Изъ точки P', принимая ее за вершину, опишемъ около линіи L коническую поверхность; тѣлесный уголъ ея, который допустимъ весьма малымъ, означимъ чрезъ α и назовемъ площади, отсѣкаемыя ею на s около P_1, P_2, P_3,... чрезъ A_1, A_2,... Пусть Θ_1, Θ_2,... углы, которые нормальныя n_1 n_2..., проведенныя къ P_1, P_2,... составляютъ съ линіею L, причемъ условимся отсчитывать ихъ отъ n_1 P_1 къ P', отъ n_2 P_2 къ P' и т. д. Означимъ чрезъ N_1, N_2,... величины слагающихъ притяженія m' къ P_1, къ P_2,... по направленію нормальныхъ, r_1, r_2... пусть разстоянія P' отъ P_1, отъ P_2,... Очевидно, что углы Θ_1, Θ_2... должны быть поперемѣнно острые и тупые, слѣдовательно:

$$N_1 = \frac{m'}{r_1^2}\ Cos\ \Theta_1,\ N_2 = -\frac{m'}{r_2^2}\ Cos\ (\Pi - \Theta_2),...$$

Возьмемъ выраженія предѣловъ площадей A_1, A_2,... они примутъ видъ:

$$A_1 = \alpha r^2\ Cos\ \Theta_1,\ A_2 = \alpha r_2^2\ Cos\ (\Pi - \Theta_2),...$$

потому

$N_1\ A_1 = \alpha m'$; $N_2\ A_2 = \alpha m'$; $A_3\ N_3 = \alpha m$; $A_4\ N_4 = -\alpha m'$,...

Такъ-какъ число точекъ P_1, P_2..., когда P лежитъ внѣ замкнутой поверхности, всегда четное, то

$$N_1A_1+N_2A_2+N_3A_3+N_4A_4+....=\alpha m'-\alpha m'+\alpha m'-\alpha m'+...=0$$

Весь тѣлесный уголъ, заключающійся въ конической поверхности, описанной около S изъ P' какъ вершины, можетъ быть разбитъ на безконечное число элементовъ тѣлесныхъ угловъ, изъ которыхъ къ каждому можно приложить предъидущія сужденія, и сумма ихъ исчерпаетъ всю разсматриваемую поверхность.

Слѣдовательно:

$$\text{Lim } \Sigma\ N.\ A=0,$$

$$\text{или } \int N.\ ds=0;$$

Но извѣстно уже, что

$$N=\frac{\partial V}{\partial n}$$

Потому

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, ds=0$$

искомая формула.

На основаніи разсмотрѣнной теоремы, Stockes доказываетъ, что *если* V *потенціалъ нѣкоторой массы* M, *и часть этой массы*, M_0, *заключается внутри замкнутой поверхности* S, *то*

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds=-4\Pi M_0,$$

гдѣ dn и ds имѣютъ предъидущія значенія, интеграція должна быть распространена на всю поверхность s.

Пусть m' масса притягиваемой частицы, лежащей въ P' внутри s; проведемъ прямую L отъ P' и продолжимъ ее до безконечности по одному направленію.

Линія L вообще пересѣкаетъ S въ одной только точкѣ, но если s поверхность возвратная, то число точекъ пересѣченія

можетъ быть больше, но всегда нечетное. Около L опишемъ коническую поверхность, тѣлесный уголъ которой пусть величина безконечно малая α, вершина въ P', для остальныхъ величинъ, встрѣчающихся въ самомъ выводѣ формулы, сохранимъ прежнее обозначеніе.

Въ разсматриваемомъ случаѣ, очевидно, углы θ_1, θ_2... должны быть попеременно острые и тупые, потому получимъ:

$$N_1 = -\frac{m'}{r_1^2}\ \mathrm{Cos}\ (\pi-\theta) = \frac{m'}{r_1^2}\ \mathrm{Cos}\ \theta,$$

$$A_1 = \alpha r_1^{\,2}\ \mathrm{Cos}\ (\pi-\theta) = -\alpha r_1^{\,2}\ \mathrm{Cos}\ \theta_1.$$

Слѣдовательно,

$$N_1 A_1 = -\alpha' m'.$$

Допустимъ, что поверхность—возвратная, тогда точекъ пересѣченія болѣе одной, но число ихъ непремѣнно нечетное, выраженія $N_2\ A_2$ и $N_3\ A_3$, $N_4\ A_4$ и $N_5\ A_5$,... взаимно уничтожаются. Все угловое пространство около P' можетъ быть раздѣлено на безконечное число тѣлесныхъ угловъ подобныхъ α; взявши сумму ихъ. исчерпаемъ всю поверхность s.

Слѣдовательно:

$$\Sigma NA = -\Sigma\alpha m',$$

$$= -M_0 \Sigma\alpha,$$

или, такъ-какъ

$$\Sigma\alpha = 4\pi,$$

то найдемъ

$$\int N.A = \int N.ds = \int \frac{\partial V}{\partial n}\, ds = -4\pi M_0.$$

§ 5. Разсмотримъ, для какого рода и характера силъ потенціалъ непремѣнно долженъ существовать; вопросъ этотъ не лишенъ нѣкотораго значенія, если принять во вниманіе свойства потенціала.

Можно показать, во-первыхъ, что *функція потенціала всегда имѣетъ мѣсто, если дѣйствующую силу должно разсматривать какъ силу центральную, т. е. что ея вліяніе*

распространяется одинаково по всѣмъ направленіямъ и измѣненія зависятъ только отъ разстоянія тѣлъ, на которыя она дѣйствуетъ; во вторыхъ, эта функція также существуетъ, если на данное тѣло дѣйствуютъ одновременно нѣсколько центральныхъ силъ, указаннаго характера.

Пусть $d\mu$ элементъ массы, опредѣляемый координатами x', y', z', въ которомъ сосредоточено дѣйствіе данной центральной силы, dm другой элементъ, находящійся отъ $d\mu$ въ разстояніи r, при чемъ

$$r = \sqrt{(x^1 - x)^2 + (y^1 - y)^2 + (z^1 - z)^2},$$

законъ же измѣненія дѣйствующей центральной силы пусть выражается нѣкоторою функціею $f(r)$.

Назовемъ слагающія данной силы по осямъ координатъ чрезъ X, Y, Z, то, какъ извѣстно, будемъ имѣть:

$$X = f(r)\ \mathrm{Cos}\ (r.x) = f(r)\frac{x'-x}{r},$$

$$Y = f(r)\ \mathrm{Cos}\ (r\,y) = f(r)\frac{y'-y}{r},$$

$$Z = f(r)\ \mathrm{Cos}\ (r.z) = f(r)\frac{z'-z}{r}.$$

Дифференцируемъ уравненіе для r находимъ:

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{x'-x}{r},$$

потому:

$$X = -f(r)\frac{dr}{dx}.$$

Допустимъ

$$F(r) = -\int f(r)\,dr,$$

тогда

$$\frac{dF(r)}{dr} = -f(r),$$

$$\frac{dF(r)}{dx} = \frac{dF(r)}{dr}\,\frac{dr}{dx} = -f(r)\frac{dr}{dx}.$$

Слѣдовательно:

$$X = \frac{\partial F(r)}{\partial x}.$$

Прикладывая совершенно такой-же путь преобразованія къ выраженіямъ Y и Z, замѣняя только дифференцированіе по x дифференцированіемъ по y и z, получимъ:

$$Y = \frac{\partial F(r)}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F(r)}{\partial z}.$$

Изъ началъ интегральнаго исчисленія извѣстно, что функція $F(r)$ непремѣнно должна существовать, потому изъ предъидущаго и *заключаемъ, что при дѣйствіи разсматриваемой силы всегда существуетъ нѣкоторая функція $F(r)$, обладающая свойствами функціи потенціала.*

Распространимъ предъидущую теорему на тотъ случай, когда на данную матеріальную частицу дѣйствуетъ нѣсколько центральныхъ силъ. Пусть $d\mu'$ вторая матеріальная частица и новый центръ силы лежитъ отъ dm въ разстояніи r_1, функція $f_1(r_1)$ выражаетъ законъ ея дѣйствія,

$$r_1 = \{(x'' - x)^2 + (y'' - y)^2 + (z'' - z)^2\}^{1/2}.$$

Слагающія силы называемъ чрезъ X_1, Y_1, Z_1, будемъ имѣть:

$$X_1 = f_1(r)\frac{x'' - x}{r_1},$$

но $\frac{\partial r_1}{\partial x} = -\frac{x'' - x}{r_1}$;

потому:

$$X = -f(r_1)\frac{\partial r_1}{\partial x}.$$

Если $F_1(r_1) = -\int f_1(r_1)\,dr_1$,

то,

$$\frac{\partial F_1(r_1)}{\partial x} = \frac{\partial F_1(r_1)}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial x} = -f(r_1)\frac{\partial r_1}{\partial x}.$$

Слѣдовательно:

$$X_1 = \frac{\partial F_1(r_1)}{\partial x}.$$

Слагающія по оси x двухъ центровъ дѣйствія выразятся формулою:

$$X + X_1 = \frac{\partial F(r)}{\partial x} + \frac{\partial F_1(r_1)}{\partial x},$$

и вообще:

$$X + X_1 + X_2 + \ldots = \frac{\partial F(r)}{\partial x} + \frac{\partial F_1(r_1)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(r_2)}{\partial x} + \ldots.$$

Совершенно подобнымъ-же путемъ получимъ:

$$Y + Y_1 + Y_2 + \ldots = \frac{\partial F(r)}{\partial y} + \frac{\partial F(r_1)}{\partial y} + \frac{\partial F(r_2)}{\partial y} + \ldots,$$

$$Z + Z_1 + Z_2 + \ldots = \frac{\partial F(r)}{\partial z} + \frac{\partial F(r_1)}{\partial z} + \frac{\partial F(r_2)}{\partial z} + \ldots,$$

Назовемъ $F(r) + F_1(r_1) + F_2(r_2) + \ldots = \Sigma F(r)$, найдемъ:

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \Sigma F(r),$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y} \Sigma F(r),$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} \Sigma F(r).$$

Если $\Sigma F(r) = V$, то

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z},$$

отсюда очевидно, что и въ этомъ случаѣ также существуетъ функція, обладающая свойствами потенціала.

§ 6. Общее выраженіе потенціала въ координатахъ прямолинейныхъ изъ уравненій (4) и (IV),

$$V = -\iiint D.\, \varphi(r)\, .\, \partial x.\, \partial y,\, \partial z.$$

Если $f(r) = \frac{1}{r^2}$ т. е. дѣйствіе силы притяженія обратно пропорціонально квадрату разстоянія, то $\varphi(r) = -\frac{1}{r}$,

получимъ:

$$V = \iiint \frac{D.\,dx.\,dy.\,dz}{r} \qquad (7)$$

Потенціалъ при дѣйствіи силы притяженія, обратно пропорціональномъ квадратамъ разстоянія, въ *прямолинейныхъ координатъ.*

Въ координатахъ полярныхъ

$$V = \iiint D.\,r\ \mathrm{Sin}\ \theta\,d\theta\,d\varphi.\,dr. \qquad (8)$$

На основаніи изложенной теоріи извѣстно, что частныя производныя по x, y, z, разумѣя подъ этими величинами координаты притягиваемой точки, отъ потенціала даютъ слагающія дѣйствующей силы по осямъ координатъ. Разсмотримъ для всѣхъ ли случаевъ притяженія *одинаково приложимы предъидущія формулы.*

Предварительно преобразуемъ ихъ еще въ болѣе простой видъ, въ которомъ онѣ часто употребляются; назовемъ элементъ объема $dx.\,dy.\,dz = dt$, изъ формулы (7) получимъ:

$$V = \iiint \frac{D}{r}\,dt. \qquad (9)$$

Съ другой стороны, если означимъ $d\delta$ элементъ поверхности, описанной радіусомъ равнымъ единицѣ,

$$\mathrm{Sin}\ \theta\,d\theta\,d\varphi = d\delta,$$

то

$$dt = r^2.\,dr.\ \mathrm{Sin}\ \theta\,d\theta\,d\varphi = r^2\,dr.\,d\delta$$

и уравненіе (8) приметъ видъ:

$$V = \iint D.\,r.\,dr.\,d\delta. \qquad (10)$$

Для опредѣленія слагающей по оси x должно взять, какъ было замѣчено, производную по x отъ выраженія (7) или (9). Здѣсь можетъ представиться два случая: когда притягиваемая точка лежитъ *внѣ* дѣйствующей массы и не находится безконечно близко около ея поверхности, тогда r всегда величина

положительная, конечная, подъинтегральное выраженіе тоже конечное и дифференцированіе всегда можно совершить подъ знакомъ интеграла; второй случай,—притягиваемая точка лежитъ сама *внутри* дѣйствующей массы, тогда для нѣкоторыхъ частицъ ближайшихъ къ *дт*, разстояніе r безконечно мало, подъинтегральная функція въ выраженіяхъ (7) и (9) можетъ повидимому обратиться въ безконечность, и слѣдовательно, дифференцированія подъ знакомъ интеграла *совершить* невозможно. Для опредѣленія потенціала должно измѣнить въ этомъ случаѣ прямолинейныя координаты въ полярныя, получимъ выраженія (8) или (10), въ которомъ уже очевидно, что ни одинъ изъ элементовъ подъинтегральной функціи не равенъ безконечности, но нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть *равны нулю.* Болѣе затрудненія представляетъ опредѣленіе слагающихъ. При этомъ опредѣленіи мы не можемъ взять непосредственно производныя по координатамъ отъ выраженій (8) или (10), потому что при дифференцированіи относительно координатъ *дт* должно было бы принять положеніе *дт измѣняемымъ въ пространствѣ*, а слѣдовательно нельзя уже разсматривать ее центромъ полярной системы,—какъ дѣлали прежде.

Потому воспользуемся особымъ пріемомъ и докажемъ потомъ, что результаты, къ которымъ онъ приводитъ, совершенно тождественны съ тѣми, которыя получаются при непосредственномъ дифференцированіи формулъ (8) и (10), если только устранить указанныя затрудненія для этого дѣйствія.

Дѣйствительно, изъ выраженія (1), при $f(r) = \frac{1}{r^2}$, имѣемъ:

притяженіе $F = \iiint \frac{D.dx.dy,dz}{r^2}$.

Слагающая притяженія X, если координаты притягиваемой точки x y, z,

$$X = \iiint \frac{D.dx.dy.dz}{r^2} \frac{x'-x}{r}.$$

Элементъ объема $dt = dx.dy.dz = r^2\,dr\,.\,d\delta$, слѣдовательно предъидущее выраженіе приметъ видъ:

$$X = \iiint D.\frac{x'-x}{r}dr\,d\delta.- \qquad (11)$$

Выраженіе $\frac{x'-x}{r}$ представляетъ Cos $(r.x)$, называя этотъ уголъ чрезъ φ, получимъ:

$$X = \iiint D \operatorname{Cos}\varphi\,.\,dr.d\delta \qquad (12)$$

Найденныя формулы (11) и (12) могутъ служить для выраженія слагающей притяженія и при допущеніи, что притягиваемая точка составляетъ часть дѣйствующей массы; потому что хотя въ этомъ случаѣ для частицъ смежныхъ съ dm разстояніе r также дѣлается величиною безконечно малою, но въ тоже время $(x'-x)$ въ числителѣ принимаетъ безконечно малое значеніе и притомъ порядка по крайней мѣрѣ равнаго r, слѣдовательно все подъинтегральное выраженіе должно имѣть значеніе конечное.

Тотъ-же пріемъ можно примѣнить для опредѣленія слагающихъ Y и Z и мы найдемъ:

$$Y = \iiint D.\frac{y'-y}{r}dr\,d\delta = \iiint D \operatorname{Cos}\varphi_1\,dr.d\delta,$$

$$Z = \iiint D.\frac{z'-z}{r}dr\,.\,d\delta = \iiint D.\operatorname{Cos}\varphi_2\,dr.d\delta.$$

Слагающія X, Y, Z, должны, по смыслу всей нашей теоріи, быть равны производнымъ V, т. е. $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V_1}{\partial y}$, $\frac{\partial V_1}{\partial z}$, взятымъ непосредственно отъ выраженія (10). Для доказательства этого положенія, Клаузіусъ[1], при опредѣленіи дифференціальныхъ коэффиціентовъ отъ выраженія (10), беретъ точку, относительно

[1] Die Potential-Function und das Potential. *Clausius.* 1867. стр. 20—23.

которой находитъ этотъ коеффиціентъ за полюсъ координатъ; самую функцію потенціала преобразовываетъ такъ, что она относится *не къ полюсу*, но къ нѣкоторой точкѣ *вблизи* его, которой координаты однако можно разсматривать величинами перемѣнными. При такихъ условіяхъ онъ совершаетъ дифференцированіе самымъ дѣломъ и потомъ вновь преобразовываетъ систему координатъ такъ, что начало ее *совпадаетъ съ полюсомъ*. Опредѣлимъ по такому пріему первоначально $\frac{\partial V}{\partial x}$. Допустимъ, что проведена прямая параллельно оси X и подвижное начало координатъ выбрано въ одной изъ точекъ этой прямой. Пусть координаты неподвижной точки x, y, z, координаты вспомогательной подвижной точки x_1 y_1 z_1; разстояніе первой точки отъ притягиваемой l, уголъ между l и осью x, назовемъ θ; уголъ между плоскостію, проходящей чрезъ l и x и плоскостію координатъ xy, означимъ чрезъ φ.

При сдѣланныхъ обозначеніяхъ, элементъ объема dt выразится формулою:

$$dt = l^2 \operatorname{Sin}\theta dl\ d\theta\ d\varphi.$$

Для опредѣленія разстоянія r этого элемента отъ подвижной точки, замѣтимъ, что она лежитъ на оси x въ разстояніи $x-x_1$ отъ полюса, въ положительную или отрицательную сторону координаты, смотря по знаку разности $x-x_1$.

Изъ треугольника, образуемаго линіями l, r и осью x, очевидно, будемъ имѣть:

$$r = \sqrt{l^2 - 2l(x-x_1)\operatorname{Cos}\theta + (x-x_1)^2}$$
$$= \sqrt{l^2 \operatorname{Sin}^2\theta + (l\operatorname{Cos}\theta + x_1 - x)^2}.$$

Подставляемъ это выраженіе въ функцію потенціала, уравненіе (9), найдемъ:

$$V = \iiint \frac{D \cdot l^2 \operatorname{Sin}\theta}{\sqrt{l^2 \operatorname{Sin}^2\theta + (l\operatorname{Cos}\theta + x_1 - x)^2}} dl \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Подъинтегральная функція въ послѣднемъ выраженіи конечна для всевозможныхъ значеній l, Θ, φ, потому что числитель содержитъ множителя $l^2 \operatorname{Sin}\Theta$, который всегда менѣе знаменателя.

Дифференцируемъ найденную формулу по x, получимъ:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint \frac{D \cdot l^2 \operatorname{Sin}\Theta \ (l \operatorname{Cos}\Theta + x_1 - x) \ \partial l \cdot \partial\Theta \cdot \partial\varphi}{\{l^2 \operatorname{Sin}^2\Theta + (l \operatorname{Cos}\Theta + x_1 - x)\}^{3/2}}$$

Подставляемъ вмѣсто x_1 величину x, соотвѣтствующую полюсу, будемъ имѣть:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint D \operatorname{Sin}\Theta \operatorname{Cos}\Theta \cdot \partial l \cdot \partial\Theta \cdot \partial\varphi. \qquad (13)$$

Для сравненія этой формулы съ выраженіемъ (12) замѣтимъ, что при сдѣланныхъ условныхъ обозначеніяхъ $\operatorname{Sin}\Theta \, \partial\Theta \, \partial\varphi = \partial\delta$; равнымъ образомъ при переходѣ вновь къ неподвижному полюсу $\partial l = \partial r$, потому уравненіе (13) приметъ видъ:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \iiint D \cdot \operatorname{Cos}\Theta \ \partial r \ \partial\delta, \qquad (\text{XIII})$$

тождественный съ уравненіемъ (12), такъ-какъ очевидно, что уголъ Θ, въ формулѣ (13), между l и x, при переходѣ къ полюсу перейдетъ въ уголъ φ, формулы (12), между r и x.

Подъинтегральныя функціи выраженій (13) и (XIII) не обращаются въ безконечность, потому ихъ можно разсматривать какъ выраженія слагающихъ притяженія по оси x.

Подобнымъ путемъ опредѣлимъ $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ для того случая, когда притягиваемая частица находится внутри дѣйствующей массы.

ГЛАВА II.

§ 1. Изложенная теорія уже обнаруживаетъ строгую зависимость, между аналитическимъ выраженіемъ притяженія извѣстной массы и соотвѣтствующимъ ей потенціаломъ, даетъ возможность перехода отъ одной изъ этихъ функцій къ другой. Потому естественно, что полное изслѣдованіе свойствъ и особенностей функціи потенціала легко можетъ привести насъ къ новымъ выводамъ и заключеніямъ относительно законовъ притяженія тѣлъ, различнаго вида и различнымъ образомъ расположенныхъ въ пространствѣ. Изслѣдованіе свойствъ потенціала заняло важное, вполнѣ соотвѣтствующее ему мѣсто въ теоріи притяженія только со временъ Грина и Гаусса. До выхода въ свѣтъ трудовъ этихъ ученыхъ было предложено нѣсколько пріемовъ и методовъ для изслѣдованія вопроса о притяженіи и нѣкоторыя изъ нихъ вполнѣ удовлетворительно разрѣшали частныя предложенія.

Мы первоначально приложимъ предъидущую теорію къ опредѣленію величины притяженія и значенія потенціала для шаровыхъ обвертокъ и разсмотримъ теорію Лапласа для опредѣленія притяженія сфероидовъ, съ приложеніемъ результатовъ къ притяженію сфероидовъ 2-го порядка. Труды творца небесной механики для насъ будутъ особенно важны, потому что наглядно укажутъ, въ какихъ случаяхъ рѣшеніе вопроса невозможно *въ конечномъ видѣ*, и даютъ весьма простой способъ для полученія приблизительныхъ рѣшеній.

Вопросъ о притяженіи сфероидовъ 2-го порядка разработывалъ также Шаль; его пріемъ отличается совершенно особеннымъ характеромъ и, хотя не вноситъ новыхъ истинъ въ общую теорію притяженія, тѣмъ не менѣе, по своей простотѣ и удобопримѣнимости, заслуживаетъ полнаго вниманія.

Эти труды были первымъ звеномъ къ разработкѣ современной теоріи потенціаловъ и притяженія, развитой Гаусомъ, Пуассономъ, Нейманомъ, Гриномъ и другими, и всегда будутъ занимать почетное мѣсто въ исторіи вопроса, потому и посвятимъ имъ настоящую главу.

§ 2. Опредѣлимъ первоначально равнодѣйствующую притяженія совокупности элементовъ, образующихъ однородную шаровую обвертку, безконечно малой толщины, на частицу, лежащую внѣ ея, принимая, что притяженіе выражается нѣкоторою функціею $\psi(\varrho)$, гдѣ ϱ разстояніе.

Вопросъ о притяженіи однородныхъ шаровыхъ обвертокъ былъ вполнѣ разрѣшенъ еще Ньютономъ[1], съ тѣхъ поръ видоизмѣнялись только пріемы.

Пусть C центръ данной обвертки, M одинъ изъ ея полярныхъ элементовъ массы, P матеріальная частица, притягиваемая ею, (черт. II).

Назовемъ: $CM=r$, $MP=\varrho$, $CP=R$; уголъ $PCM=\theta$, другой полярный уголъ, между PCM и плоскостію сѣченія шаровой обвертки ABK, означимъ чрезъ ϕ; толщина обвертки пусть dr, плотность D. Объемъ элемента M, въ полярныхъ координатахъ, dv равенъ:

$$dv=r^2 \operatorname{Sin}\theta\, d\theta\, dr,\, d\phi,$$

$$\text{масса}=D.\, r^2 \operatorname{Sin}\theta\, d\theta\, dr.\, d\phi.$$

Для каждаго элемента M существуетъ совершенно подобный ему элементъ по другую сторону PC, потому равнодѣйствующая притяженія обвертки должна проходить по направленію CP.

Слагающая притяженія элемента M, при данномъ законѣ зависимости силы отъ разстоянія, по направленію равнодѣйствующей, выразится формулою:

---

[1] Principia, lib. I. Prop. 70—71.

$$D\,.\,r^2\,\mathrm{Sin}\,\Theta\,.\,\partial\Theta\,.\,\partial r\,.\,\partial\varphi\,\psi(\varrho)\,\mathrm{Cos}\,MPC=$$
$$D\,.\,r^2\,\mathrm{Sin}\,\Theta\,.\,\partial\Theta\,.\,\partial r\,.\,\partial\varphi\,\psi(\varrho).\frac{R-r\,\mathrm{Cos}\,\Theta}{\varrho}$$

Изъ послѣдняго уравненія можно исключить Θ при помощи выраженія:

$$\varrho^2=R^2+r^2-2Rr\,\mathrm{Cos}\,\Theta;$$

слѣдовательно,

$$\mathrm{Sin}\,\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho}=\frac{\varrho}{Rr}\;,\;R-r\,\mathrm{Cos}\,\Theta=\frac{\varrho^2+R^2-r^2}{2R}.$$

Подставляемъ найденныя значенія въ выраженіе для слагающей притяженія элемента M, по направленію равнодѣйствующей, получимъ:

$$=\frac{D.r\,\partial r}{2R^2}\left(\varrho^2+R^2-r^2\right)\partial\varrho\,.\,\partial\varphi\,.\,\psi(\varrho).$$

Равнодѣйствующая притяженія всей обвертки найдется, если возьмемъ двойной интегралъ отъ послѣдняго выраженія въ предѣлахъ $R-r$ и $R+r$ для ϱ и въ предѣлахъ 0 и 2π для φ; будемъ имѣть:

$$F_1=\frac{D.r.\partial r}{2R^2}\int_{R-r}^{R+r}\int_{0}^{2\pi}(\varrho^2+R^2-r^2)\,\partial\varrho\,.\,\partial\varphi\,\psi(\varrho)$$

отсюда

$$F_1=\frac{\pi D.r.dr}{R^2}\int_{R-r}^{R+r}(\varrho^2+R^2-r^2)\,\psi(\varrho)\,\partial\varrho;$$

назовемъ:

$$\int\psi(\varrho)\,\partial\varrho=\varphi_1(\varrho)\text{ и }\int\varrho\varphi_1(\varrho)\,\partial\varrho=\psi_1(\varrho);$$

интегрируемъ по частямъ предъидущее выраженіе, найдемъ:

$$\int(\varrho^2+R^2-r^2)\,\psi(\varrho)\,\partial\varrho=(\varrho^2+R^2-r^2)\,\varphi_1(\varrho)-2\int\varrho\varphi_1(\varrho)\,\partial\varrho,$$
$$=(\varrho^2+R^2-r^2)\varphi_1(\varrho)-2\psi_1(\varrho).$$

Слѣдовательно:

$$=\frac{\pi D.r\partial r}{R^2}\int_{R-r}^{R+r}(\varrho^2+R^2-r^2)\psi(\varrho)\partial\varrho=2\pi.D.r\partial r \text{ умнож.}$$

$$\left\{\frac{R+r}{R}\varphi_1(R+r)-\frac{R-r}{R}\varphi_1(R-r)-\frac{1}{R^2}\psi_1(R+r+\frac{1}{R^2}\psi_1(R-r)\right\}$$

$$=2\pi D.r\partial r\frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{\psi_1(R+r)-\psi_1(R-r)}{R}\right\}.$$

Для опредѣленія выраженія притяженія однородной шаровой обвертки на частицу, лежащую внутри ея, при законѣ дѣйствія силы притяженія $\psi(\varrho)$, въ предъидущей формулѣ нужно только измѣнить предѣлы интеграціи по ϱ на величины $r-R$ и $R+r$, сообразно съ измѣненіемъ геометрическаго положенія притягиваемой частицы. Потому будемъ имѣть:

$$=2\pi Dr.\partial r\left\{\frac{r+R}{R}\varphi_1(R+r)+\frac{r-R}{R}\varphi_1(r-R)-\frac{1}{R^2}\psi_1(r+R)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R^2}\psi_1(r-R)\right\}=2\pi D.r.\partial r\frac{\partial}{\partial R}\left(\psi_1\frac{(r+R)-\psi_1(r-R)}{R}\right).$$

Приложеніе полученныхъ общихъ формулъ къ частнымъ случаямъ не можетъ, конечно, представить затрудненій; такъ, если $\psi(r)=\frac{1}{r^2}$, то $\varphi_1(r)=-\frac{1}{r}+A, \psi_1(r)=-r+\frac{1}{2}Ar^2+B$, гдѣ A и B величины постоянныя. Выраженіе притяженія шаровой обвертки на частицу, лежащую внѣ ея, приметъ видъ:

$$=2\pi D.r\partial r\frac{\partial}{\partial R}\left\{-\frac{4r+A(R+r)^2-A(R-r)^2}{2R}\right\},$$

$$=2\pi D.r\partial r\frac{\partial}{\partial R}\left\{-\frac{2r}{R}+2Ar\right\}=\frac{4\pi D.r^2\partial r}{R^2}, =\frac{\text{масса обверт.}}{\text{кв. разстоян.}} \quad (1)$$

Притяженіе на частицу, лежащую внутри обвертки, выразится формулою:

$$=2\pi D.r\partial r\frac{\partial}{\partial R}\left\{-\frac{4R+A(R+r)^2-A(r-R)^2}{2R}\right\}$$

$$=2\pi D.r\partial r\frac{\partial}{\partial R}\left(-2+2AR\right)=0. \quad (2)$$

Отъ выраженія притяженія шаровой обвертки легко перейдти къ выраженію притяженія шара однородной плотности, на частицу, лежащую внѣ его; должно только проинтегрировать формулу (1) въ предѣлахъ $r=0$ и $r=r$, получимъ:

$$\frac{4}{3}\frac{\pi r^3 D}{R^2}=\frac{\text{масса шара}}{R^2},$$

равнодѣйствующую притяженія шара.

Для частицы, находящейся въ центрѣ однороднаго шара, изъ выраженія (2)-го, очевидно, равнодѣйствующая притяженія равна нулю.

Если частица лежитъ съ внутренней стороны поверхности шара, радіусъ котораго болѣе r, въ разстояніи r отъ центра, то, на основаніи предъидущаго, всѣ части шара, лежащія въ разстояніи большемъ r отъ центра, не обнаружатъ притяженія на данную частицу; дѣйствіе остальной массы выразится формулою:

$$\frac{4}{3}\frac{\pi r^3 D}{r^2}=\frac{4}{3}\pi r.D,$$

изъ которой очевидно, что для частицъ, находящихся внутри однороднаго шара, притяженіе измѣняется пропорціонально разстоянію ихъ отъ центра.

Опредѣлимъ притяженіе круговой полоски на частицу, лежащую на прямой перпендикулярной къ ней и проходящей чрезъ центръ ея C (чер. III). Назовемъ радіусъ $CP=r$, $CQ=r+dr$; пусть k толщина, D плотность, разстояніе частицы отъ центра x. Масса полоска равна $2\pi D.krdr$; всѣ частицы круговой полоски находятся въ равныхъ разстояніяхъ отъ притягиваемой и разстояніе это выразится чрезъ $\sqrt{x^2+r^2}$, потому равнодѣйствующая притяженія совпадетъ съ перпендикуляромъ къ круговой полоски, проходящимъ чрезъ центръ C, и приметъ видъ:

$$\frac{2\pi D.k.rdr}{x^2+r^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}.$$

Для всей площади круга, если означимъ предѣльныя значенія радіуса чрезъ $r=0$ и $r=b$, получимъ, что притяженіе равно:

$$2\pi Dkx\int_0^b \frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}.$$

Извѣстно, что $\int \frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}}$; слѣдовательно:

$$\int_0^b \frac{rdr}{(x^2+b^2)^{3/2}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}},$$

потому притяженія круга

$$= 2\pi Dx\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}}\right\}.$$

Послѣднее выраженіе можно примѣнить къ опредѣленію притяженія цилиндра на частицу, лежащую на его оси. Допустимъ, что цилиндръ разсѣченъ на полоски плоскостями, перпендикулярными къ оси; x разстояніе притягиваемой точки, dx толщина полоски, b радіусъ цилиндра, притяженіе полоски выразится формулою:

$$2\pi D\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\right\}dx.$$

Если c разстояніе частицы отъ ближайшаго основанія цилиндра, h высота цилиндра, то притяженіе равно:

$$2\pi D\int_0^{c+h}\left\{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\right\}dx = 2\pi D\left\{c+h-\sqrt{(c+h)^2+b^2}+\sqrt{c^2+b^2}\right\}.$$

Для опредѣленія притяженія конуса на частицу въ его вершинѣ возьмемъ выраженіе притяженія полоски основанія конуса

$$2\pi D\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)dx.$$

Назовемъ чрезъ α половину вершиннаго угла, $\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}$ потому равнодѣйствующая притяженія конуса, если высота его h выразится формулою:

$$2\pi D(1-\mathrm{Cos}\,\alpha)\int_0^h dx = 2\pi D(1-\mathrm{Cos}\,\alpha)h \qquad (M)$$

Легко получить подобное же выраженіе для притяженія усѣченнаго конуса, въ этомъ случаѣ h высота отрѣзка. Отсюда очевидно также, что если частица p лежитъ въ вершинѣ двухъ конусовъ ABP и $A'B'P'$ и мы возьмемъ на нихъ отрѣзки (чер. IV) $ABCD$ и $A'B'C'D'$ въ различныхъ разстояніяхъ отъ p, но *высоты ихъ допустимъ* равными, то, на основаніи формулы *(M)*, притяженія этихъ отрѣзковъ равны и противуположны.

§ 3. Предложеніе относительно притяженія шаровою обверткою матеріальной частицы, лежащей внутри ея, Ньютонъ[1] распространилъ и на тотъ случай, когда обвертка ограничена двумя эллипсоидальными поверхностями, подобными между собою и подобнымъ образомъ расположенными.

Шаль[2] называетъ такія поверхности *гомотетичными;* ограничимся относительно этого вопроса пока пріемомъ Ньютона, замѣчательнымъ по своей простотѣ.

Пусть притягиваемая частица P представляетъ вершину безконечнаго числа прямыхъ конусовъ (черт. V); назовемъ $NMPM'N'$ и $nmPm'n'$ двѣ производящія одного изъ этихъ конусовъ; на фигурѣ имѣемъ пересѣченіе данной обвертки съ плоскостію, проходящей чрезъ данныя производящія. Пересѣченіе данной эллипсоидальной обвертки съ плоскостію дастъ два подобныхъ и подобнымъ образомъ расположенныхъ эллипса, потому имѣетъ:

$$MN = MN', \quad mn = m'n'.$$

[1] Principia, lib. I. Prop. 91. Cor. 3.

[2] Mémoire sur l'attraction des ellipsoides. *Chasles.* Mémoires de l'Académie de sciences, t. IX.

Части $MmnN$ и $M'm'n'N'$ суть усѣченные конусы, имѣющіе равныя высоты и общій вершинный уголъ, потому, на основаніи формулы *(M)*, притяженіе ихъ на P равны и противуположны. Подобное же замѣчаніе можно сдѣлать относительно каждаго изъ остальныхъ конусовъ, имѣющихъ вершину въ P, слѣдовательно равнодѣйствующая притяженія обвертки, для разсматриваемаго случая, исчезаетъ.

Допустимъ, что притягиваемая частица лежитъ внѣ данной эллипсоидальной обвертки. Пуассонъ, весьма простымъ пріемомъ[1], показалъ, что направленіе равнодѣйствующей притяженія *совпадаетъ съ осью обертывающаго конуса, описаннаго около данной обвертки, изъ притягиваемой частицы, какъ изъ вершины.*

Назовемъ матеріальную частицу, лежащую внѣ обвертки, и притягиваемую ею чрезъ μ; допустимъ, что P точка, въ которой ось обертывающаго конуса, описаннаго изъ вершины μ, пересѣкаетъ плоскость соприкосновенія этого конуса и эллипсоидальной обвертки. Предположимъ, $NMN'M'$ и $nmn'm'$ имѣютъ то-же значеніе какъ и въ предъидущемъ случаѣ; dm масса элемента Mn, dm' масса элемента $M'n'$. — (Черт. V).

Притяженіе dm на частицу μ равно $\frac{dm}{(\mu M)^2}$ и оно дѣйствуетъ по μM; притяженіе dm' на μ равно $\frac{dm'}{(\mu M')^2}$ и оно дѣйствуетъ по $\mu M'$.

Но очевидно,

$$\frac{dm}{(PM)^2} = \frac{dm'}{(PM')^2}$$

и кромѣ того, изъ теоріи коническихъ сѣченій извѣстно, что $M\mu$ и μM составляютъ равные углы съ μP, потому:

$$\frac{MP}{M\mu} = \frac{M'P}{M'\mu},$$

[1] Traité de Méchanique, tom. I. pp. 492 — 494. Crelle Journal. Vol. XII, p. 141.

слѣдоавтельно,

$$\frac{dm}{(M\mu)^2} = \frac{dm'}{(M'\mu)^2}.$$

Отсюда видимъ, что элементы dm и dm' обнаруживаютъ равное притяженіе, а такъ-какъ направленіе ихъ притяженій составляетъ равные углы съ $P\mu$, то равнодѣйствующая этихъ двухъ силъ и пойдетъ по $P\mu$.

Подобный же результатъ можетъ быть найденъ и для всякой другой пары элементовъ, на которые разбивается эллиптическая обвертка, а слѣдовательно и вся равнодѣйствующая также пойдетъ по $P\mu$.

§ 4. Формула, выражающая притяженіе шаровой обвертки на частицу, лежащую внѣ ея, когда дѣйствующая сила обратнопропорціональна квадрату разстоянія, показываетъ, что значеніе этого притяженія одинако съ тѣмъ случаемъ, если вся масса притягивающаго тѣла совмѣщается съ ея центромъ. Весьма легко можно доказать, что предъидущее свойство притяженія можетъ имѣть мѣсто только въ тѣхъ случаяхъ, когда измѣненія его прямо пропорціональны разстояніямъ между данными тѣлами или обратно пропорціональны ихъ квадратамъ.

Пусть $\psi(\varrho)$ выражаетъ нѣкоторый, пока неизвѣстный, законъ притяженія данной обвертки на матеріальную частицу, R разстояніе частицы до центра обвертки; r радіусъ ея и пусть:

$$\psi_1(\varrho) = \int \left\{ \varrho \int \psi(\varrho)\, d\varrho \right\} d\varrho.$$

Выраженіе притяженія шаровой обвертки, въ настоящемъ случаѣ, какъ извѣстно, приметъ видъ:

$$= 2\pi Dr\, dr \frac{d}{dR} \left\{ \frac{\psi_1(R+r) - \psi_1(R-r)}{R} \right\}.$$

По условію же вопроса оно должно быть равно тому притяженію, которое имѣло бы мѣсто, если-бы вся масса обвертки совмѣстилась съ ея центромъ, слѣдовательно

$$= 4\pi Dr^2\, dr\, \psi(R).$$

Сравниваемъ два послѣднія выраженія и дѣлаемъ сокращеніе, получимъ:

$$\frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{\psi_1(R+r)-\psi_1(R-r)}{R}\right\}=2r\,\psi(R).$$

Разложимъ $\psi_1(R+r)$ и $\psi_1(R-r)$ по степенямъ r, подставимъ ψ'_1 вмѣсто $\frac{\partial\psi_1(R)}{\partial R}$, будемъ имѣть:

$$2r\psi(R)=2\frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{r}{R}\psi_1'(R)+\frac{r^3}{1.2.3.R}\psi_1'''(R)+\ldots.\right\},$$

$$=2r\psi(R)+\frac{2\partial}{\partial R}\left(\frac{r^3}{1.2.3.R}\psi_1'''(R)+\ldots.\right).$$

Изъ этого выраженія можемъ заключить, что

$$\frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{r^3}{1.2.3.R}\psi_1'''(R)+\ldots.\right\}=0,$$

каково бы нибыло r; потому

$$\frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{\psi_1'''(R)}{R}\right\}=0,\ \frac{\partial}{\partial R}\left\{\frac{\psi_1^{(r)}(R)}{R}\right\}=0. \qquad (4)$$

Но,

$$\psi_1'(R)=R\int\psi(R)\partial R,$$

$$\psi_1''(R)=\int\psi(R)\partial R+R\psi(R),$$

$$\psi'''(R)=2\psi(R)+R\psi'(R),$$

слѣдовательно, принимая во вниманіе уравненіе (4), будемъ имѣть:

$\frac{2\psi(R)}{R}+\psi'(R)=$ постоянной произвольной.

Возьмемъ $3A$ за постоянную произвольную величину, умножимъ обѣ части предъидущаго уравненія на R^2, проинтегрируемъ его по R, получимъ:

$$R^2\psi(r)=AR^3+B,$$

слѣдовательно:

$$\psi(r)=AR+\frac{B}{R^2}.$$

Найденное выраженіе для $\psi(r)$ удовлетворяетъ предъиду-

щія условныя уравненія и приводитъ къ заключенію, что функція силы притяженія, удовлетворяющая требуемымъ условіямъ, состоитъ изъ суммы двухъ членовъ, одинъ изъ нихъ прямо пропорціоналенъ разстояніямъ, другой, — обратно ихъ квадратамъ.

§ 5. Если дѣйствіе силы притяженія прямо пропорціонально массамъ и разстоянію между данными тѣлами, то можно показать, что выраженіе равнодѣйствующей притяженія приметъ видъ одинаковый съ тѣмъ случаемъ, когда вся масса совокуплена въ центрѣ тяжести.

Возьмемъ центръ тяжести притягивающаго тѣла за начало координатъ; пусть a, b, c координаты притягиваемой частицы, x, y, z перемѣнныя координаты одного изъ элементовъ тѣла, котораго масса m, разстояніе отъ притягиваемой частицы r.

Притяженіе разсматриваемаго элемента выразится чрезъ mr, слагающія его по направленіямъ параллельнымъ осямъ координатъ примутъ видъ:

$$mr.\frac{a-x}{r}; mr.\frac{b-y}{r}, mr.\frac{c-z}{r}.$$

Назовемъ чрезъ X, Y, Z, слагающія параллельныя осямъ координатъ притяженія всего тѣла, будетъ имѣть:

$$X=\Sigma m(a-x),\ Y=\Sigma m(b-y),\ Z=\Sigma m(c-z).$$

Такъ-какъ за начало координатъ принятъ центръ тяжести притягивающей массы, то очевидно:

$$\Sigma mx=0,\ \Sigma my=0,\ \Sigma mz=0;$$

слѣдовательно:

$$X=a\Sigma m;\ Y=b\Sigma m;\ Z=c\Sigma m;$$

эти-же выраженія и представляютъ слагающія притяженія всей масссы даннаго тѣла, предполагая ее совмѣщенной съ началомъ координатъ или, по нашему допущенію, съ центромъ тяжести данной массы.

§ 6. Мы разсмотрѣли приложеніе общихъ формулъ притяженія къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ; опредѣлимъ выраже-

нія потенціаловъ для тѣхъ-же случаевъ и изслѣдуемъ соотношеніе между формулами, которыя получимъ и найденными предъ тѣмъ.

Найдемъ значеніе потенціала V для сферической обвертки, плотность которой пусть нѣкоторая функція разстоянія отъ центра.

Возьмемъ за ось x прямую, соединяющую притягивающую частицу P съ центромъ обвертки; линія эта, какъ извѣстно, представляетъ и равнодѣйствующую притяженія. Пусть R разстояніе P отъ центра, r радіусъ обвертки, Θ и ϕ углы полярныхъ координатъ, разстояніе одного изъ элементовъ обвертки до P. При такихъ обозначеніяхъ масса элемента обвертки выразится, въ полярныхъ координатахъ, формулою:

$$D.r^2 \operatorname{Sin} \Theta.dr.\, d\Theta.\, d\phi,$$

слѣдовательно,

$$V=\int_{r_1}^{r_2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{Dr^2 \operatorname{Sin}\Theta,\, dr\, d\Theta\, d\phi,}{\rho}$$

гдѣ r_1 и r_2 радіусы обвертки, внутренній и внѣшній.

Отсюда:

$$V=2\pi\int_{0}^{\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{Dr^2 \operatorname{Sin}\,\Theta dr\, d\Theta}{\rho};$$

но,

$$\rho^2=r^2-2Rr\,\operatorname{Cos}\,\Theta+R^2;$$

потому,

$$\operatorname{Sin}\Theta\frac{d\theta}{d\rho}=\frac{\rho}{Rr},$$

наконецъ, вообще,

$$V=\frac{2\pi}{R}\iint D.r dr.\, d\rho.$$

Если желаемъ примѣнить эту формулу, то должны различать *три* случая:

1-й случай. Матеріальная частица P лежитъ за внѣшней поверхностію шаровой обвертки, при этомъ допущеніи предѣлы для ϱ будутъ:
$\varrho = R - r$ и $\varrho = R + r$. Слѣдовательно,

$$V = \frac{2\pi}{R} \int_{r_1}^{r_2} \int_{R-r}^{R+r} Dr.\, dr\, d\varrho. \qquad (5)$$

$$V = \frac{4\pi}{R} \int_{r_1}^{r_2} Dr^2.\, dr. \qquad (7)$$

Если назовемъ чрезъ M массу шаровой обвертки, то, какъ извѣстно,

$$M = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} D^2.\, dr,$$

потому

$$V = \frac{M}{R}, \qquad (6)$$

результатъ совершенно согласный съ прежде полученнымъ.

Формула (5) даетъ возможность опредѣлить потенціалъ шара, если плотность величина постоянная; должно только за предѣлы для r взять 0 и r, получимъ:

$$V = \frac{4\pi}{R} \int_{0} Dr^2\, dr$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{R} D.r^3.$$

Назовемъ массу шара чрезъ N, найдемъ:

$$V = \frac{N}{R}.$$

Изъ формулы (6) также имѣемъ:

$$X = \frac{\partial V}{\partial R} = -\frac{M}{R^2}.$$

2-ой случай. Допустимъ, что притягиваемая частица лежитъ въ части пространства, ограниченной внутреннею поверхностію шаровой обвертки; тогда за предѣлы для ϱ должно брать $r-R$ и $r+R$.

Слѣдовательно,

$$V = \frac{2\pi}{R}\int_{r_1}^{r_2}\int_{r-R}^{r+R} D.r\,dr\,d\varrho,$$

$$V = 4\pi\int_{r_1}^{r_2} Dr\,dr. \qquad (8)$$

Такъ-какъ это выраженіе не зависитъ отъ R, то

$$\frac{\partial V}{\partial R} = 0$$

результатъ также уже прежде найденный.

3-й случай. Соединимъ найденные результаты, формулы (7) и (8), увидимъ, что если частица P лежитъ между двумя поверхностями, ограничивающими обвертку, на разстояніи R отъ центра, предѣльные радіусы самой обвертки назовемъ чрезъ r_1 и r_2,

то

$$V = \frac{4\pi}{R}\int_{r_1}^{R} D.\varrho^2 d\varrho + 4\pi\int_{R}^{r_2} D.\varrho\,d\varrho.$$

Допустимъ, что разсматриваемъ массу шара, въ этомъ случаѣ $r_1 = 0$, r_2 равно радіусу шара, напр. r, и мы получимъ:

$$V = \frac{4\pi}{R}\int_{0}^{R} D.\varrho^2\,d\varrho + 4\pi\int_{R}^{r} D\varrho\,d\varrho;$$

отсюда :

$$V = \frac{4}{3}\pi D.R^2 + 2\pi Dr^2 - 2\pi DR^2$$

$$= 2\pi Dr^2 - \frac{2}{3}\pi DR^2; \qquad (9)$$

полагая,

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$V = 2\pi Dr^2 - \frac{2}{3}\pi D(x^2+y^2+z^2). \qquad (IX)$$

Выраженія (9) и (IX) представляютъ потенціалъ однороднаго шара на частицу, лежащую внутри его.

При послѣдующемъ изложеніи условимся означить потенціалъ шаровой обвертки на частицу, лежащую внутри ея, чрезъ V_i на частицу же лежащую внѣ ея, чрезъ V_a.

§ 7. Изложивъ достаточно подробно теорію притяженія шаровыхъ обвертокъ и шаровъ, опредѣленіе ихъ потенціаловъ, перейдемъ къ изслѣдованію законовъ притяженія и потенціаловъ другихъ сфероидовъ.

Мы упомянули уже объ основныхъ теоремахъ притяженія эллипсоидовъ Ньютона и Пуасона, замѣчательныхъ по своей простотѣ. Попытки разрѣшить вопросъ о притяженіи *Даламбера* и *Лагранжа*[1] были почти неудачны; онѣ не дали основанія для развитія общей теоріи; методъ Лежандра[2], хотя вполнѣ самостоятельный, отличается совершенно частнымъ характеромъ. Всѣ эти труды, относительно общей теоріи вопроса, имѣютъ одно только чисто историческое значеніе. Потому мы прямо и приступимъ къ изложенію изслѣдованій Лапласа[3].

---

[1] Opuscules Mathémati que, tom. VI, VII. *D'Alambert*, Mémoires de l'Akadémie de Berlin, 1773, 75, 95.

[2] Mémoires de l'Akadémie des sciences 1788. Recuel des savants étrangers, t. X.

[3] Traité de Mécanique céleste, par *Laplace*, livre III, pp. 3—22 1799 г.

Пусть x, y, z три прямоугольныя координаты одного изъ элементовъ даннаго сфероида, назовемъ его массу dM; принимая плотность сфероида однородной и допустивъ ее равной единицѣ, будемъ имѣть:

$$dM = dx.\,dy.\,dz.$$

Назовемъ чрезъ a, b, c прямолинейныя, прямоугольныя координаты притягиваемой частицы; чрезъ A, B, C слагающія притяженія всего сфероида, параллельныя осямъ координатъ и допустимъ, для простоты, что притяженіе дѣйствуетъ по закону обратно пропорціональному квадратамъ разстоянія, то, какъ извѣстно, для слагающихъ A, B, C, получимъ слѣдующія выраженія:

$$A = \iiint \frac{(a-x).\,dx.\,dy\,dz}{\{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\}^{3/2}},$$

$$B = \iiint \frac{(b-y)\,dx,\,dy\,dz}{\{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\}^{3/2}},$$

$$C = \iiint \frac{(c-z)\,dx,\,dy\,dz}{\{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\}^{3/2}},$$

гдѣ тройные интегралы должны быть взяты въ предѣлахъ всей массы сфероида.

Непосредственное интегрированіе выраженій для A, B, C, въ предложенной формѣ, часто представляетъ непреодолимыя трудности, иногда ихъ можно избѣжать, преобразовывая подъинтегральную функцію приличнымъ образомъ.

§ 8. Разсмотримъ общее начало для преобразованія выраженій, подобныхъ предъидущимъ, предложенное Лапласомъ.

Изслѣдуемъ дифференціальную функцію $P.\,dx.\,dy.\,dz$, гдѣ P нѣкоторая функція x, y, z. Можно допустить, что x функція перемѣнныхъ y и z и нѣкоторой новой перемѣнной p, пусть $x = \Phi(y, z, p)$. Въ этомъ случаѣ, разсматривая y и z какъ величины постоянныя, будемъ имѣть: $dx = \beta dp$, гдѣ β нѣкоторая функція y, z, p.

Предъидущее выраженіе:

$$P dx\, dy\, .\, dz,$$

перейдемъ въ формулу:

$$\beta .\ P .\ dp .\ dy .\ dz, \qquad (11)$$

гдѣ при интегрированіи должно первоначально вмѣсто x подставить въ P его значеніе $x = \varphi(y, z, p)$.

Точно также можно положить въ полученномъ дифференціальномъ выраженіи $y = \varphi_1(z, p, q)$, гдѣ q новая перемѣнная, и слѣдовательно, y функція перемѣнныхъ z, p, q. Разсматривая z и p какъ постоянныя, найдемъ $dy = \beta' dq$, причемъ β' нѣкоторая функія z, p, q. Дифференціальное выраженіе (11) приметъ видъ:

$$\beta . \beta' . P . dp\, dq\, dz, \qquad (12)$$

въ которомъ при интегрированіи должно первоначально вмѣсто y подставить его значеніе $\varphi_1(z, p, g)$ въ $\beta\ P$.

Наконецъ допустимъ: $z = \varphi_{11}(p, qr)$, гдѣ r новая перемѣнная, $\varphi_1(p, q, r)$ нѣкоторая функція p, q, r. Принимая p и q за величины постоянныя, будемъ имѣть: $dz = \beta'' dr$, гдѣ β'' функція p, q r. Дифференціальная формула (12) выразится:

$$\beta . \beta' . \beta'' . P . dp . dq . dr,$$

для интегрсціи должно подставить вмѣсто z его значеніе въ $\beta . \beta' P$ равное $\varphi_{11}(p, g r)$. При помощи изложенныхъ преобразованій данная дифференціальная функція переходитъ въ другую, зависящую отъ трехъ новыхъ перемѣнныхъ p, q и r, которыя связаны со старыми уравненіями:

$$x = \varphi(yzp),\ y = \varphi_1(z, p, q),\ z = \varphi_{11}(p, q, r),$$

слѣдовательно намъ остается только найдти β, β', β''.

Съ этою цѣлью замѣтимъ, что они опредѣляютъ значенія x, y, z, какъ функцій перемѣнныхъ p, q, r. Величина β'' есть коефиціентъ dr, въ дифференціальномъ выраженіи для z, разсматривая p и q какъ постоянныя, потому:

$$\beta''=\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right).$$

Значеніе β' есть коэффиціентъ при ∂q въ дифференціальномъ выраженіи y, взятомъ при условіи, что p и z величины постоянныя; потому β' получимъ, если продифференцируемъ y, допуская p величиной постоянной, исключимъ ∂r, при помощи дифференціала z, взятаго въ предположеніи p равно постоянной и приравняемъ полученное выраженіе нулю.

На этомъ основаніи будемъ имѣть два уравненія:

$$\partial y=\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\partial q+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\partial r,$$

$$0=\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)\partial q+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right).\ \partial r;$$

отсюда:

$$\partial y=\partial q\left\{\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)}{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)}\right\},$$

слѣдовательно:

$$\beta'=\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial q}}{\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)}$$

Наконецъ β изображаетъ коэффиціентъ ∂p, въ дифференціальномъ выраженіи для x, взятомъ въ предположеніи y и z величинами постоянными; эти же условія приведутъ къ тремъ слѣдующимъ уравненіямъ:

$$\partial x=\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)\partial p+\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right).\partial q+\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\partial r.$$

$$0=\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)\partial p+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\partial q+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\partial r,\right.$$

$$0=\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)\partial p+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)\partial q+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)\partial r.$$

Допустимъ:

$$E=\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)-\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dq}\right)-\left(\frac{dx}{dq}\right)\left(\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dp}\right)$$

$$-\left(\frac{dx}{dq}\right)\left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)+\left(\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dz}{dq}\right)-\left(\frac{dx}{dr}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dz}{dp}\right);$$

въ такомъ случаѣ для dx получимъ выраженіе:

$$dx=\frac{E.dp}{\left(\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)-\left(\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dq}\right)},$$

слѣдовательно,

$$\beta=\frac{E}{\left(\frac{dy}{dq}\right)\left(\frac{dz}{dr}\right)-\left(\frac{dy}{dr}\right)\left(\frac{dz}{dq}\right)}$$

Подставляемъ найденныя выраженія для β,β',β'', увидимъ, что $\beta.\beta',\beta''=E,$

потому дифференціальная функція $P.\,dx\,dy\,dz$ перейдетъ въ формулу:

$$E\,P.\,dp.\,dq.\,dr,$$

здѣсь P означаетъ уже то, во что перейдетъ, первоначально данное его значеніе, при замѣненіи x, y, z, ихъ величинами въ функціахъ p, q, r.

Предъидущее изслѣдованіе указываетъ, что весь вопросъ объ опредѣленіи окончательныхъ выраженій изъ формулъ (10) сводится на такой выборъ перемѣнныхъ p, q, r, при которомъ совершеніе интеграціи было бы возможно.

Преобразуемъ на самомъ дѣлѣ координаты x, y, z въ другія и возьмемъ для этой цѣли: радіусъ, проходящій отъ притягивающаго элемента къ притягиваемому, и углы, которые онъ составляетъ съ данными прямыми или плоскостями. Пусть r разсматриваемый радіусъ; p уголъ, который онъ составляетъ съ прямой, проходящей чрезъ притягиваемую частицу параллельно

оси x; q уголъ, образуемый проэкціею радіуса-вектора, на плоскость $y\ z$ съ осью y; будемъ имѣть:

$x=a-r\,\mathrm{Cos}\,p;\ y=b-r\,\mathrm{Sin}\,p.\,\mathrm{Cos}\,q;\ z=c-r\,\mathrm{Sin}\,p.\,\mathrm{Sin}\,q$...(13)

Опредѣлимъ значеніе E при новыхъ перемѣнныхъ, получимъ, что оно равно:

$$E=-r^2\ \mathrm{Sin}\ p;$$

причемъ $dx.\ dy.\ dz$ преобразуется въ выраженіе:

$$-r^2\ \mathrm{Sin}\ p\ dp.\ dq.\ dr.$$

Послѣднее выраженіе представляетъ величину dM, массу частицы, потому оно должно быть всегда положительнымъ; если же будемъ разсматривать $\mathrm{Sin}\ p$, dp, dq, dr тоже величинами положительными, то необходимо измѣнить въ немъ знакъ сообразно условію, или взять $E=r^2\ \mathrm{Sin}\ p$.

Выраженія (10) для A, B, C примутъ видъ:

$$A=\int\int\int dr.\ dp.\ dq.\ \mathrm{Sin}\ p.\ \mathrm{Cos}\ p,$$

$$B=\int\int\int dr.\ dp.\ dq.\ \mathrm{Sin}^2 p.\ \mathrm{Cos}\ q,$$

$$C=\int\int\int dr.\ dp.\ dq\ \mathrm{Sin}^2 p\ \mathrm{Sin}\ q,$$

потому что

$$\left\{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2\right\}^{1/2}=r.$$

Тройные интегралы въ выраженіяхъ A, B, C должны быть взяты въ предѣлахъ всей притягивающей массы. Интеграція относительна r не представляетъ затрудненій, но она должна быть совершена въ различныхъ предѣлахъ, смотря потому, находится ли притягиваемая точка внутри или внѣ даннаго сфероида.

Въ первомъ случаѣ, прямая, проходящая чрезъ притягиваемую частицу, пересѣкаетъ сфероидъ и дѣлится ею на двѣ части; если части эти назовемъ чрезъ r и r^1, то

$$\left.\begin{aligned} A &= \int\int (r+r')\, dp.\, dq.\, \mathrm{Sin}\, p.\, \mathrm{Cos}\, p, \\ B &= \int\int (r+r')\, dp.\, dq.\, \mathrm{Sin}^{\,2} p.\, \mathrm{Cos}\, q, \\ C &= \int\int (r+r')\, dp.\, dq.\, \mathrm{Sin}^{\,2} p.\, \mathrm{Sin}\, q; \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Интеграція относительно p и q должна быть совершена въ предѣлахъ для p и q равныхъ нулю и p, q равныхъ двумъ прямымъ угламъ. Во второмъ случаѣ: Если чрезъ r назовемъ величину радіуса при вхожденіи въ сфероидъ, чрезъ r' его величину при выхожденіи, то будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} A &= \iint (r'-r)\, dp\, .\, dq\, .\, \mathrm{Sin}\, p.\, \mathrm{Cos}\, p, \\ B &= \iint (r'-r)\, dp\, .\, dq\, .\, \mathrm{Sin}^2\, p\, .\, \mathrm{Cos}\, q, \\ C &= \iint (r-r)\, dp\, .\, dq\, .\, \mathrm{Sin}^2 p.\, \mathrm{Sin}\, q, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

для опредѣленія предѣловъ p и q должны служить точки, въ которыхъ $r'-r=0$, т. е. гдѣ радіусъ векторъ есть касательная къ сфероиду.

И такъ, какъ слѣдствіе всей предъидущей теоріи Лапласа, можно заключить, что нахожденіе выраженій для слагающихъ притяженія сфероидовъ, параллельныхъ осямъ координатъ, не представляетъ затрудненій; преобразованіе этихъ выраженій въ другую систему координатъ тоже, какъ видѣли, очень просто; но къ сожалѣнію мы не имѣемъ критеріума, по которому могли бы заключить, что вновь избранная система координатъ приведетъ насъ къ выраженіямъ интегрируемымъ конечнымъ образомъ. Не имѣемъ также никакихъ данныхъ, по которымъ могли бы судить о выгодѣ одной системы передъ другою, при замѣненіи. Для поясненія теоріи приложимъ ее къ частному, но весьма важному случаю, который дастъ намъ возможность вывести нѣкоторыя повыя заключенія.

§ 9. Примѣнимъ найденныя формулы къ сфероидамъ, ограниченнымъ поверхностями втораго порядка. Общее уравненіе поверхностей втораго порядка, отнесенныхъ къ тремъ прямоугольнымъ осямъ координатъ x, y, z, имѣемъ видъ:

$$A+Bx+Cy+Ez+Fx^2+Hxy+Ly^2+Mxz+NyZ+Oz^2=0.$$

При измѣненіи начала координатъ входятъ три произвольныя величины, потому что положеніе новаго начала координатъ относительно стараго опредѣляется тремя координатами. Съ измѣненіемъ положенія самыхъ координатъ, около ихъ начала, вводятся три произвольные угла; слѣдовательно, измѣняя одновременно, въ предъидущемъ уравненіи поверхностей 2-го порядка, начало координатъ и ихъ положеніе, получимъ новое уравненіе, втораго порядка, котораго коеффиціенты суть функціи даннаго уравненія, и кромѣ того, оно должно заключать шесть произвольныхъ постоянныхъ величинъ. Если приравняемъ нулю коеффиціенты первыхъ степеней координатъ и ихъ двойныхъ произведеній, то изъ получаемыхъ такимъ образомъ выраженій, опредѣлимъ всѣ постоянныя произвольныя, общее же уравненіе поверхностей втораго порядка приметъ видъ:

$$x^2+my^2+nz^2=k^2, \qquad (16)$$

Займемся изслѣдованіемъ вопроса только для сфероидовъ ограниченныхъ замкнутыми поверхностями, при чемъ, какъ извѣстно, m и n должны быть величины положительныя. Разсматриваемое уравненіе представитъ въ этомъ случаѣ эллипсоидъ, котораго три полуоси суть значенія перемѣнныхъ x, y, z, если положимъ въ немъ послѣдовательно двѣ изъ нихъ равными нулю; потому полуоси параллельныя x, y, z суть: k, $\frac{k}{\sqrt{m}}$, $\frac{k}{\sqrt{n}}$.

Масса даннаго эллипсоида, если плотность его равна единицѣ, выразится формулою:

$$\frac{4}{3}\pi.\frac{k^3}{\sqrt{m.n}}$$

Подставимъ въ уравненіе (16) вмѣсто x, y, z ихъ значенія въ p, q, r получимъ;

$$r^2\{\mathrm{Cos}^2 p + m\ \mathrm{Sin}^2 p\ \mathrm{Cos}^2 q + n\ \mathrm{Sin}^2 p\ \mathrm{Sin}^2 q\} - 2r\,(a\,\mathrm{Cos}\,p + mb.\ \mathrm{Sin}\,p\ \mathrm{Cos}\,q + nc\ \mathrm{Sin}\,p\ \mathrm{Sin}\,q) = k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2;$$

если допустимъ:

$$J = a\ \mathrm{Cos}\,p + mb.\ \mathrm{Sin}\,p.\ \mathrm{Cos}\,q + nc\ \mathrm{Sin}\,p\ \mathrm{Sin}\,q,$$

$$L = \mathrm{Cos}^2 p + m\ \mathrm{Sin}^2 p.\ \mathrm{Cos}^2 q + n.\ \mathrm{Sin}^2 p\ \mathrm{Sin}^2 q,$$

$$R = J^2 + (k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2).L,$$

то, разрѣшая предъидущее уравненіе, получимъ:

$$r = \frac{j \mp \sqrt{R}}{L},$$

откуда найдемъ r', если возьмемъ радикалъ съ плюсомъ и r, если возьмемъ его съ минусомъ.

Легко также найдти:

$$r + r' = \frac{2j}{L} \quad \text{и} \quad r' - r = \frac{2\sqrt{R}}{L}.$$

Подставляемъ найденныя значенія въ уравненія (14), опредѣляющія слагающія притяженія, параллельныя осямъ координатъ, на частицу, лежащую внутри сфероида, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\iint \frac{dp.dq.J.\ \mathrm{Sin}\,p\ \mathrm{Cos}\,p}{L}. \\ B &= 2\iint \frac{dp.dq.J.\ \mathrm{Sin}^2 p\ \mathrm{Cos}\,q}{L}. \\ C &= 2\iint \frac{dp\ dq\ J.\ \mathrm{Sin}^2 p\ \mathrm{Sin}\,q}{L}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Для выраженія подобныхъ же слагающихъ на частицу, лежащую внѣ сфероида, изъ уравненій (15), послѣ подстановки найдемъ формулы:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\iint \frac{dp\,.\,dq\ \mathrm{Sin}p\,.\,\mathrm{Cos}p\sqrt{R}}{L}, \\ B &= 2\iint \frac{dp\,.\,dq\,\mathrm{Sin}^2 p.\,\mathrm{Cos}q\,.\sqrt{R}}{L}, \\ C &= 2\iint \frac{dp\,.\,dq\,.\,\mathrm{Sin}^2 p\,\mathrm{Sin}q\,.\sqrt{R}}{L}; \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

три послѣдніе интеграла должны быть взяты между предѣлами, соотвѣтствующими $R = 0$.

Интегрируя на самомъ дѣлѣ уравненія (17) Лапласъ получилъ[1] для слагающихъ притяженія:

$$A = \frac{3aM}{k^3}F,\quad B = \frac{3bM}{k^3}\cdot\frac{\partial(\lambda F)}{\partial\lambda},$$

$$C = \frac{3cM}{k^3}\left(\frac{\partial\lambda' F}{\partial\lambda'}\right),$$

гдѣ:

$$\lambda^2 = \frac{1-m}{m},\quad \frac{1-n}{n} = \lambda'^2$$

$$F = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1+\lambda^2 x^2)(1+\lambda' x^2)}}$$

Слѣдовательно окончательное рѣшеніе вопроса вполнѣ зависитъ отъ интегрированія выраженія F.

Значеніе же неопредѣленнаго интеграла F не можетъ быть получено вообще при λ и λ' неопредѣленныхъ, за исключеніемъ только случая, когда одно изъ количествъ λ или λ' равно нулю, или когда они равны между собою. При послѣднемъ допущеніи разсматриваемый сфероидъ переходитъ въ *эллипсоидъ вращенія*, k полуось вращенія, F найдется по извѣстнымъ правиламъ интегральнаго исчисленія:

$$F = \int \frac{x^2\,dx}{1+\lambda^2 x^2} = \frac{1}{\lambda^3}(\lambda - \mathrm{arc\ tang}\,\lambda).$$

Для исключенія частныхъ дифференціальныхъ коэффиціентовъ $\left(\frac{\partial\lambda F}{\partial\lambda}\right)$ и $\left(\frac{\partial.\lambda' F}{\partial\lambda'}\right)$, входящихъ въ B и C, замѣтимъ, что

[1] Mécanique céleste, t. II стр. 9—13.

$$dF = \frac{\partial\lambda}{\lambda}\left(\frac{\partial.\lambda F}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial\lambda'}{\lambda'}\left(\frac{\partial\lambda' F}{\partial\lambda'}\right) - F\left(\frac{\partial\lambda}{\lambda} + \frac{\partial\lambda'}{\lambda'}\right);$$

но когда $\lambda = \lambda'$, то

$$\frac{\partial(\lambda F)}{\partial\lambda} = \frac{\partial(\lambda' F)}{\partial\lambda'}, \quad \frac{\partial\lambda}{\lambda} = \frac{\partial\lambda'}{\lambda'},$$

потому

$$\frac{\partial(\lambda F)}{\partial\lambda}.\partial\lambda = {}^1/_2\,\lambda.dF + F\partial\lambda = \frac{1}{2\lambda}.d\lambda^2 F.$$

Подставимъ вмѣсто F его величину, получимъ:

$$\frac{\partial_\lambda F}{\partial\lambda} = \frac{1}{2\lambda^3}\left\{\text{arc tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right\},$$

слѣдовательно, слагающія эллипсоида вращенія, котораго полуось вращенія k, выразятся слѣдующими формулами:

$$A = \frac{3aM}{k^3\lambda^3}(\lambda - \text{arc tang}\,\lambda),$$

$$B = \frac{3bM}{2k^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right),$$

$$C = \frac{3bM}{2k^3\lambda^3}\left(\text{arc tang}\,\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Интеграція уравненій (18) тоже не можетъ быть совершена въ полученной формѣ, вслѣдствіе присутствія радикала $\sqrt{R}$ въ числителѣ. Не имѣя возможности найдти интегралъ въ конечномъ видѣ, Лапласъ прибѣгнулъ къ помощи рядовъ и даетъ методъ разложенія въ рядъ уравненій (18) при помощи одного дифференцированія[1], но результаты этого метода не имѣютъ точнаго критеріума для опредѣленія погрѣшности. Потому Лапласъ обобщилъ вопросъ разложенія и изслѣдовалъ его при помощи шаровыхъ функцій. Труды Ламе, Лежень-Дирехле внесли много новаго въ вопросъ о разложеніи при помощи шаровыхъ функцій, потому онъ займетъ одну изъ слѣдующихъ главъ монографіи.

[1] **Mécanique céleste. T. II стр. 13—17.**

§ 10. Изслѣдованіе вопроса о притяженіи эллипсоидовъ Шаль изложилъ въ первый разъ въ «Recueil des savants étrangers»[1]; онъ слѣдовалъ синтетическому пріему Маклорена. Потомъ онъ далъ новое рѣшеніе и помѣстилъ его въ журналѣ Ліувилля[2]; здѣсь онъ предлагаетъ свой самостоятельный методъ.

Въ основаніи изслѣдованій Шаля лежитъ геометрическое предложеніе Ivory, состоящее въ слѣдующемъ: (чер. VII).

Если главныя сѣченія двухъ данныхъ эллипсоидовъ описаны изъ однихъ и тѣхъ-же фокусовъ, и если на одномъ изъ нихъ возьмемъ произвольно двѣ точки s и m, а на второмъ соотвѣтственныя точки s' и m', то прямая sm' и $s'm$ равны. Подъ соотвѣтственными точками Ivory разумѣетъ такія точки на эллипсоидахъ, которыхъ координаты въ сторону каждой изъ главныхъ осей относятся между собою, какъ діаметры тѣхъ-же эллипсоидовъ, имѣющія направленіе этой оси.

Замѣтимъ еще нѣсколько геометрическихъ предложеній, относительно эллипсоидовъ, которыя послужатъ для вывода выраженій ихъ притяженій.

Возьмемъ, двѣ эллипсоидальныя поверхности A и B, подобныя между собою, подобнымъ образомъ расположенныя и концентрическія.

Пусть a, b, c три главныя полудіаметра одной изъ нихъ; na, nb, nc — соотвѣтствующіе полудіаметры другой. Уравненіе эллипсоидовъ примутъ видъ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=n^2.$$

---

[1] Mémoire sur l'attraction des ellipsoides. T. IX. p. 629. Comptes Rendus. Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoide hétérogène sur un points extérieur. 1838. T. X. p. 902—17.

[2] Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoide hétérogène sur un point extérieur. Journal de Mathématiques, Liouville, 1840. p. 465—488.

Положимъ, что нѣкоторой точкѣ m, опредѣляемой координатами x, y, z, соотвѣтствуетъ точка m', опредѣляемая координатами x', y', z, и, кромѣ того, имѣемъ:

$$\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{y}{y'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{c}{c'}$$

гдѣ a', b', c', произвольные коеффиціенты.

Допустимъ наконецъ, что двумъ даннымъ эллипсоидамъ соотвѣтствуютъ двѣ другія поверхности A' и B' также два подобные и подобнымъ образомъ расположенные эллипсоида; одинъ изъ нихъ проходитъ чрезъ точку $x'\ y'\ z'$. Эти поверхности обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: *нѣкоторой части объема, заключающагося между ними, всегда соотвѣтствуетъ часть объема, заключающаяся между первыми поверхностями и притомъ отношеніе между ними постоянно и равно* $\frac{a'b'c'}{a\,b\,c}$.

Дѣйствительно, изъ отношенія между координатами двухъ соотвѣтствующихъ точекъ, легко найдти:

$$dx'.\,dy'.\,dz' = \frac{a'b'c'}{a\,b\,c}\,dx.\,dy.\,dz, \qquad (20)$$

формула, выражающая наше предложеніе.

Припишемъ неопредѣленнымъ коеффиціентамъ a', b', c' такія значенія, при которыхъ существовали бы два слѣдующія уравненія.

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2,$$
$$a^2 - c^2 = a'^2 - c'^2,$$

и поверхности A и A' имѣли бы главныя сѣченія, описанными изъ тѣхъ-же фокусовъ. Пусть подобныя же уравненія имѣютъ мѣсто и для поверхностей B и B'.

Предположимъ, что поверхности A и B лежатъ безконечно близко одна къ другой, положеніе это имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, если n безконечно мало отличается отъ единицы; между данными поверхностями долженъ лежать безконечно тонкій слой C,

для котораго A наружная, B внутренняя оболочки. Двѣ другія поверхности A' и B' образуютъ между собою также безконечно тонкій слой C', для котораго A' наружная, B' внутренняя поверхности.

Толщина слоевъ, по одной и той-же главной оси, находится въ отношеніи полудіаметровъ внѣшнихъ слоевъ по той-же оси.

Дѣйствительно, пусть a и a' два внѣшніе полудіаметра, соотвѣтствующіе имъ внутренніе полудіаметры na и na', толщина двухъ слоевъ выразится формулами:

$$da = a - na, \quad da' = a' - na',$$

отношеніе между толщинами:

$$\frac{da}{da'} = \frac{a}{a'}.$$

§ 11. Пусть s и s' двѣ соотвѣтственныя точки на внѣшнихъ поверхностяхъ A и A'; m и m' двѣ другія соотвѣтственныя точки на тѣхъ-же поверхностяхъ; dv и dv' элементы объема между двумя слоями при точкахъ m и m'. Изъ уравненія (20) имѣемъ:

$$\frac{dv}{dv'} = \frac{a\ b.\ c}{a'\ b'\ c'},$$

или, такъ-какъ

$$ms' = m's,$$

то,

$$\frac{dv}{ms'} : \frac{dv'}{ms'} = \frac{a.b.c.}{a'\ b'\ c'};$$

для всѣхъ же элементовъ разсматриваемаго слоя, будемъ имѣть:

$$\Sigma\frac{dv}{ms'} : \Sigma\frac{dv'}{m's} = \frac{a.\ b.\ c}{a'\ b'\ c'};$$

слѣдовательно искомое выраженіе равно отношенію между объемами двухъ слоевъ. Геометрическое свойство, выражаемое этимъ уравненіемъ, весьма важно; оно *одно можетъ послужить для* разрѣшенія *всѣхъ вопросовъ о притяженіи эллипсоидовъ.*

Докажемъ, что дифференціальные коэффиціенты $\sum \frac{dv}{ms'}$, относительно координатъ x, y, z, точки m, суть слагающія притяженія, которое слой C обнаруживаетъ на точку s'.

Дѣйствительно, притяженіе элемента dv, лежащаго въ m, обнаруживаетъ дѣйствіе на s' (чер. VIII), и оно выражается формулою $\frac{dv}{(ms')^2}$; слагающая этаго притяженія, параллельная оси x, приметъ видъ:

$$\frac{\partial V}{(ms')^2} \operatorname{Cos}(ms'.\hat{x}).$$

Допустимъ, что точка s' перемѣщена на величину dx параллельно оси x, назовемъ чрезъ s новое ея положеніе, чрезъ Ps перпендикуляръ на ms', то изъ прямоугольнаго треугольника sPs' будемъ имѣть:

$$s'P = ss'. \operatorname{Cos} Ps's = - ss' \operatorname{Cos} ms's;$$

но $s'P$ равна разности двухъ радіусовъ ms и ms', слѣдовательно представляетъ дифференціалъ ms'; $ss' = dx$, потому:

$$\partial(ms') = - dx. \operatorname{Cos}(s'm.\hat{x}),$$

откуда:

$$\operatorname{Cos}(s'm.\ x) = - \partial \frac{(ms')}{dx}.$$

Слагающая притяженія элемента dv на s' приметъ видъ:

$$\frac{-dv}{(ms)'^2} \cdot \frac{\partial(ms')}{dx} = dv. \partial \frac{\left(\frac{1}{ms'}\right)}{dx}.$$

Выраженіе dv не зависитъ отъ координатъ точки s' относительно которой производится дифференцированіе, поэтому

$$dv. \partial \frac{\left(\frac{1}{ms'}\right)}{dx} = \partial \frac{\left(\frac{dv}{ms'}\right)}{dx},$$

слагающая притяженіе элемента dv. Слагающая притяженія всего слоя:

$$\Sigma \frac{\partial\left(\frac{dv}{ms'}\right)}{\partial x} = \partial . \frac{\Sigma\left(\frac{dv}{ms'}\right)}{\partial x.}$$

Если предположимъ, что изъ двухъ слоевъ, C и C', первый объемлетъ второй и точка s′ расположена въ части пространства, обнимаемой поверхности втораго слоя, то, на основаніи теоремы Ньютона, она не должна претерпѣвать отъ него никакого притяженія. Дифференціальные коеффиціенты суммы $\Sigma\left(\frac{dv}{ms'}\right)$, какъ слагающія притяженія, должны быть равны нулю, слѣдовательно $\Sigma\frac{dv}{ms'}$, величина постоянная.

Отсюда выводимъ слѣдующую теорему: если имѣемъ безконечно тонкій слой, заключающійся между двумя поверхностями концентрическихъ эллипсоидовъ, подобныхъ между собою и подобнымъ образомъ расположенныхъ, то сумма элементовъ этого слоя, раздѣленная на ихъ разстоянія до частицы, притягиваемой даннымъ слоемъ, постоянна для всѣхъ положеній этой точки на другомъ эллипсоидѣ, имѣющемъ главныя сѣченія описанными изъ тѣхъ-же фокусовъ, какъ и внѣшняя поверхность даннаго слоя.

Величина разсматриваемой суммы выразится формулою:

$$\Sigma\frac{dv'}{ms'} = \frac{a'b'c'}{a.b.c}\Sigma\frac{dv}{ms'}.$$

Допустимъ, что другой слой C'' аналогиченъ со слоемъ C', т. е. заключается между двумя поверхностями A'' и B'', подобными между собою и описанными изъ тѣхъ-же фокусовъ какъ A и B; сверхъ того слой C'', такъ-же какъ и C', объемлется слоемъ C. Назовемъ чрезъ $a''\ b''\ c''$ главные полудіаметры внѣш-

ней поверхности A''; s'' и m'' точки поверхности, соотвѣтствующія s и m поверхности A; будемъ имѣть:

$$\Sigma\frac{dv''}{m''s}=\frac{a''b''c''}{a.\ b.\ c}\Sigma\frac{dv}{ms''};$$

но мы видѣли, что функція $\Sigma\frac{dv}{ms'}$ имѣетъ постоянное значеніе при всѣхъ возможныхъ положеніяхъ s' внутри пространства слоя C, точка s'' находится въ такомъ-же положеніи, потому

$$\Sigma\frac{dv}{ms'}=\Sigma\frac{dv}{ms''}$$

Изъ послѣднихъ уравненій получимъ:

$$\frac{\Sigma\frac{dv'}{m's'}}{\Sigma\frac{dv''}{m''s}}=\frac{a'.b'.c'}{a''b''c''}$$

Формула эта доказываетъ еще теорему: если *имѣемъ два безконечно тонкихъ эллипсоидальныхъ слоя, заключающихся между двумя подобными и подобнымъ образомъ расположенными поверхностями, причемъ внѣшнія поверхности описаны изъ однихъ и тѣхъ-же фокусовъ и внутреннія подчинены подобнымъ-же условіямъ, то суммы элементовъ каждаго слоя, раздѣленныя на ихъ разстоянія отъ данной точки, лежащей внѣ ихъ, относятся между собою какъ объемы данныхъ слоевъ.*

Двѣ послѣднія теоремы выражаютъ собственно геометрическія свойства эллипсоидальныхъ слоевъ, но онѣ могутъ быть преобразованы иначе и представятъ свойства притяженія. Первая изъ нихъ дастъ возможность опредѣлять направленіе притяженія; вторая,—его напряженность, откуда легко найдти величину притяженія.

Сумма $\Sigma\frac{dv'}{m's}$ имѣетъ постоянное значеніе для всѣхъ положе-

ній точки s на поверхности A, можно показать, что *разсматриваемая поверхность нормальна къ направленію притяженія слоя C' на точку s.*

Дѣйствительно, мы уже видѣли, что при переходѣ отъ точки s къ точкѣ s', лежащей отъ нея безконечно близко, выраженіе $\partial \sum \frac{dv'}{\frac{m's}{ss'}}$ представляетъ слагающую притяженія слоя C' на точку s по направленіи элемента ss', если же этотъ элементъ расположенъ на поверхности A, то $\sum \frac{dv}{m's} =$ постоянной, откуда $\partial \sum \frac{dv'}{m's} = 0;$ слѣдовательно, слагающая притяженія по элементу ss' равна нулю.

Доказанное свойство имѣетъ мѣсто для всякаго элемента поверхности A, потому *заключаемъ*, что *притяженіе направлено по нормальной къ этой поверхности.*

И такъ, имѣемъ еще теорему: притяженіе безконечно тонкаго слоя, заключающагося между двумя подобными эллипсондами, концентрическими и подобнымъ образомъ расположенными, дѣйствуетъ на матеріальную частицу по нормальной къ эллипсоиду, проведенной чрезъ эту точку, и притомъ эллипсоиду, котораго фокусы и направленіе главныхъ сѣченій совпадаютъ съ фокусами и главнымъ сѣченіемъ внѣшней поверхности притягивающаго слоя.

Эту теорему можно высказать еще иначе: *поверхности уровня относительно притягивающаго слоя суть эллипсоиды, которыхъ главныя сѣченія описаны изъ тѣхъ-же фокусовъ, какъ внѣшняя поверхность даннаго слоя.* Отсюда также слѣдуетъ, что внѣшняя поверхность притягивающаго слоя и сама представляетъ поверхность уровня.

Въ уравненіи:

$$\frac{d\sum\frac{dv'}{m's}}{dx} : \frac{d\sum\frac{dv''}{m's'}}{dx} = \frac{a'.b'.c'}{a''b''c''},$$

направленіе оси x произвольно, дифференціальные коэффиціенты выражаютъ слагающія притяженія параллельныя этой оси слоевъ C', C'' на точку s, потому имѣемъ слѣдующую теорему:

Если два эллипсоидальные слоя, безконечно тонкіе, заключены между двумя подобными поверхностями, и притомъ такими, что ихъ внутреннія и внѣшнія оболочки описаны изъ однихъ и тѣхъ-же фокусовъ, то эти слои обнаруживаютъ на точку, лежащую внѣ ихъ, притяженія, которыхъ слагающія, по какому либо одному произвольному направленію, относятся между собою, какъ объемы этихъ слоевъ.

Изъ этой теоремы можно заключить, что притяженія подобныхъ слоевъ имѣютъ одинаковыя направленія и относятся между собою какъ массы слоевъ.

Она-же даетъ также возможность перейдти къ опредѣленію того случая притяженія, когда толщина слоевъ конечна или когда имѣемъ два сплошные эллипсоида.

Пусть A и A' два эллипсоида, которыхъ главныя сѣченія имѣютъ одни и тѣ-же фокусы; допустимъ ихъ состоящими изъ безконечно тонкихъ слоевъ, заключающихся между подобными поверхностями. Назовемъ чрезъ a, b, c и a', b', c' главные полудіаметры двухъ поверхностей; полудіаметры внѣшней поверхности слоя перваго эллипсоида na, nb, nc;—втораго,—$na', nb' nc'$.

Очевидно, предполагая, что перемѣнная n имѣетъ одинаковое значеніе для обоихъ слоевъ и что главныя сѣченія эллипсоидовъ описаны изъ однихъ фокусовъ, притяженія ихъ на внѣшнюю точку должны имѣть одинаковыя направленія и находится между собою въ постоянномъ отношеніи $\frac{a\,b\,c}{a'b'c'}$; слѣдовательно и сла-

гающія этого притяженія должны находиться въ подобномъ же отношеніи. Сумма слагающихъ притяженій извѣстнаго числа послѣдовательныхъ слоевъ перваго эллипсоида должна имѣть тоже отношеніе къ суммѣ слагающихъ притяженія соотвѣтствующихъ слоевъ втораго эллипсоида; отсюда заключаемъ, что притяженія цѣлыхъ объемовъ, образуемыхъ разсматриваемыми слоями, имѣютъ одинаковыя направленія и относятся между собою какъ $\frac{a.b.c}{a'b'c}$. Толщина слоевъ по оси a равна $a(1-n)$ и $a'(1-n)$, отношеніе между ними $\frac{a}{a'}$. Объемы двухъ конечныхъ слоевъ имѣютъ отношеніе $\frac{a.b.c}{a'b'c'}$, потому это-же отношеніе опредѣляетъ объемы и элементарныхъ слоевъ. И такъ, отсюда выводимъ слѣдующую теорему:

Если имѣемъ два слоя конечной толщины, изъ которыхъ каждый заключается между двумя подобными эллипсоидами, сверхъ того эллипсоиды, образующіе внѣшнія поверхности двухъ слоевъ, имѣютъ одинаковые фокусы, толщины слоевъ по одной главной оси находятся между собою въ отношеніи двухъ полудіаметровъ внѣшнихъ поверхностей по той-же оси (подобное же соотношеніе должно существовать между внутренними поверхностями), то притяженія, обнаруживаемыя этими слоями, на точку внѣ ихъ, должны имѣть одно направленіе и относиться какъ массы слоевъ.

Изъ предъидущей теоріи можно видѣть, что для разрѣшенія разсматриваемаго вопроса о притяженіи эллипсоидовъ достаточно найдти величину притяженія одного слоя на частицу, лежащую внѣ его.

Лапласъ доказываетъ, что притяженіе слоя на точку s, лежащую на его внѣшней поверхности, имѣетъ направленіе нормальной sA въ этой точки и выражается формулою $4\pi DE$,

гдѣ D плотность слоя, E его толщина въ притягиваемой точкѣ. Но доказательства Лапласа, равно какъ и Поасона [1], основаны на теоремахъ, не вошедшихъ еще въ изложеніе разсматриваемаго предмета [2], потому перейдемъ къ пріему Шаля для непосредственнаго вычисленія выраженія притяженія эллипсоидальнаго слоя.

§ 12. Допустимъ, что матеріальная частица S, находящаяся на внѣшней поверхности эллипсоидальнаго слоя, представляетъ вершину конуса.

Пусть этотъ конусъ пересѣкается сферою, описанною изъ его вершины, какъ изъ центра, радіусомъ равнымъ единицѣ; элементъ ея поверхности, δ имѣетъ измѣренія безконечно малыя. Для сферы, радіусъ которой r, поверхность пересѣченія ея съ конусомъ выразится формулою $r^2\delta$; слѣдовательно, часть слоя, заключающагося въ конусѣ, можетъ быть разложена на безконечно малые элементы: $r^2\delta . dr$. Сила притяженія каждаго изъ этихъ элементовъ выразится формулою:

$\frac{Dr^2 . \delta . dr}{r^2} = D . \delta . dr$; равнодѣйствующая опредѣлится, если проинтегрируемъ послѣднее выраженіе въ данныхъ предѣлахъ для r. Назовемъ чрезъ m, n и n' точки, въ которыхъ одна изъ производящихъ конуса встрѣчаетъ двѣ внѣшнія и внутреннюю оболочку слоя; интеграція должна быть совершена отъ S до n и отъ n' до m, потому получимъ:

$$D . \delta (Sn + mn'),$$

но такъ-какъ въ эллипсоидѣ $mn' = Sn$, то изъ предъидущей формулы имѣемъ:

$$2D . Sn . \delta .$$

---

[1] Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs, par *Poisson;* Mémoire del'Institut, 1811, 1-re partie, p. 5—31.

[2] Они войдутъ въ главу III.

Вообразимъ нормальную къ разсматриваемому слою въ точкѣ S, въ точкѣ A она встрѣчаетъ внутреннюю поверхность, для SA можемъ принять выраженіе:

$$SA = Sn \operatorname{Cos}(nSA);$$

выраженіе притяженія приметъ видъ:

$$\frac{2D.SA.\delta}{\operatorname{Cos}(nSA)}.$$

Слагающая его по направленію нормальной

$$2D.SA\delta.$$

Для полученія слагающей притяженія всего слоя должно взять интегралъ отъ этого выраженія, относительно δ, въ предѣлахъ полусферы; онъ долженъ быть равенъ 2π, слѣдовательно, выраженіе притяженія всего слоя выразится формулою:

$$4\pi D.SA,$$

гдѣ SA толщина слоя, слѣдовательно выраженіе совершенно согласно съ формулою Лапласа.

Толщину слоя SA можно замѣнить другою, болѣе употребительною величиною. Изъ центра слоя O опустимъ перпендикуляръ OP на нормальную SA, изъ треугольниковъ SPO и SAs, найдемъ:

$$\frac{SA}{SP} = \frac{Ss}{So};$$

но двѣ поверхности слоевъ подобны и подобнымъ образомъ расположены, потому отношеніе $\frac{Ss}{So}$ постоянно, каковъ бы ни былъ полудіаметръ OS; слѣдовательно, называя чрезъ a_1, b_1, c_1 главные полудіаметры внѣшней поверхности, будемъ имѣть:

$$\frac{SA}{SP} = \frac{da_1}{a_1},$$

выраженіе притяженія даннаго слоя приметъ видъ:

$$4\pi D \frac{da_1}{a} S.P.$$

Положимъ, что имѣемъ второй безконечно тонкій слой, заключающійся, какъ и первый, между двумя подобными и подобнымъ образомъ расположенными поверхностями, и соотвѣтственно, имѣющій тѣ-же фокусы, какъ и поверхности перваго слоя; сверхъ того допустимъ, что этотъ слой лежитъ внутри перваго, слѣдовательно S находится внѣ его.

Притяженіе, обнаруживаемое вторымъ слоемъ на точку S, имѣетъ одинаковое направленіе съ притяженіемъ перваго слоя и они относятся между собою какъ произведенія $a.b.c$ и $a_1b_1c_1$, гдѣ $a_1b_1c_1$ суть три полудіаметра новаго слоя, слѣдовательно, все притяженіе новаго слоя выразится формулою:

$$4\pi D.\frac{da_1}{a_1}.\frac{abc}{a_1b_1c_1}SP,$$

но извѣстно, что

$$\frac{da_1}{a_1}=\frac{da}{a},$$

потому для выраженія притяженія найдемъ:

$$4\pi D.\frac{da}{a}.\frac{abc}{a_1b_1c_1}.SP.$$

При опредѣленіи притяженія цѣлаго эллипсоида будемъ разсматривать его состоящимъ изъ безконечнаго числа тонкихъ слоевъ, содержащихся между двумя подобными поверхностями; опредѣлимъ слагающія притяженія, по тремъ осямъ координатъ одного слоя на точку S, интегралы отъ этихъ выраженій представятъ слагающія притяженія всего эллипсоида.

Пусть три главныя оси эллипсоида будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ и осями координатъ, конечно они также должны быть и главными осями каждаго элементарнаго слоя. Означимъ чрезъ x, y, z, координаты притягиваемой точки.

Притяженіе слоя, котораго полудіаметры a, b, c, имѣетъ, какъ было доказано, направленіе нормальной къ S, точки вспомогательнаго эллипсоида, описаннаго на полудіаметрахъ a_1, b_1,

c_1. Для полученія слагающихъ притяженія достаточно знать углы, которые эта нормальная образуетъ съ осями.

Плоскость касательная къ вспомогательному эллипсоиду въ точкѣ встрѣчаетъ ось x на разстояніи $\frac{a_1^2}{x}$ отъ центра; перпендикуляръ, опущенный изъ центра на плоскость касательную, равенъ линіи SP, потому называя чрезъ α уголъ, который этотъ перпендикулкръ составляетъ съ осью x, будемъ имѣть:

$$SP = \frac{a_1^2}{x} \operatorname{Cos} \alpha, \text{ откуда } \operatorname{Cos} \alpha = \frac{SP.x}{a_1^2}.$$

Слѣдовательно, слагающая притяженія слоя параллельная оси x на точку S равна:

$$4\pi D \frac{da}{a} \frac{a.b.c}{a_1 b_1 c_1} \frac{(SP)^2}{a_1^2} x;$$

слагающая притяженія всего эллипсоида выразится интеграломъ отъ этого выраженія въ предѣлахъ $a = 0$ и $a =$ полудіаметру наибольшаго эллипсоида.

Пусть A, B, C три главные полудіаметра наружной поверхности даннаго эллипсоида, наружная поверхность разсматриваемаго слоя подобна предъидущей, потому:

$$b = a \frac{A}{B}, \quad c = a \frac{C}{A}.$$

Вспомагательный эллипсоидъ, проходящій чрезъ точку S, которой координаты x, y, z, удовлетворяетъ условному уравненію:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1.$$

Этотъ эллипсоидъ имѣетъ главныя сѣченія описанными изъ тѣхъ-же фокусовъ какъ и внѣшняя поверхность разсматриваемаго слоя, потому получимъ два слѣдующія отношенія:

$$b_1^2 - a_1^2 = b^2 - a^2, \; c_1^2 - a_1^2 = c^2 - a^2,$$

или,

$$b_1^2 = a_1^2 + a^2 \left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right), \; c_1^2 = a_1^2 + a^2 \left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right);$$

условное уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_1^2+a^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)}+\frac{Z^2}{a_1^2+a^2\left(\frac{C^2}{A^2}-1\right)}=1,$$

уравненіе, опредѣляющее отношеніе между a_1 и a. Наконецъ, линія SP равна перпендикуляру, опущенному изъ центра на плоскость касательную въ S къ вспомогательному эллипсоиду и, какъ извѣстно, имѣемъ:

$$\frac{1}{SP^2}=\frac{x^2}{a_1^4}+\frac{y^2}{b_1^4}+\frac{z^2}{c_1^4},$$

или,

$$\frac{1}{SP^2}=\frac{x^2}{a_1^4}+\frac{y^2}{\left\{a_1^2+a^2\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)\right\}^2}+\frac{z^2}{\left\{a_1^2+a^2\left(\frac{C^2}{A^2}-1\right)\right\}^2}.$$

И такъ, намъ извѣстно шесть отношеній между семью перемѣнными величинами a, b, c, a_1, b_1, c_1, SP; для выраженія всѣхъ перемѣнныхъ въ функціяхъ одной изъ нихъ, допустимъ $\frac{a}{a_1}=u$: выраженіе, опредѣляющее отношеніе между a_1 и a, по исключеніи $a_1=\frac{a}{u}$, приметъ видъ:

$$u^2x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{u^2}+\left(\frac{B^2}{A^2}-1\right)}+\frac{z^2}{\frac{1}{u^2}+\left(\frac{C^2}{A^2}-1\right)}=a^2. \qquad (21)$$

Дифференцируемъ послѣднее уравненіе относительно u и a, подставляемъ $\frac{1}{PS^2}$ вмѣсто равной ему величины, получимъ:

$$\frac{a^3}{u^3}\,\frac{1}{(PS)^2}\,du=da, \text{ отсюда } \frac{(SP)^2}{a_1^2}\,\frac{da}{a}=\frac{du}{u}.$$

Слѣдовательно, для выраженія слагающей притяженія элементарнаго слоя эллипсоида найдемъ формулу:

$$4\pi D.x.\frac{b.c}{b_1c_1}\,du,$$

или, подставляя вмѣсто b, c, b_1, c_1 найденныя для нихъ величины, получимъ:

$$4\pi D . xB . C \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}.$$

Послѣднее выраженіе нужно проинтегрировать для опредѣленія слагающей притяженія всего эллипсоида. Предѣлы интеграціи должны соотвѣтствовать значеніямъ $a=0$ и $a=A$; но мы имѣли $u=\frac{a}{a_1}$, потому для предѣловъ получимъ величины: $u=0$ и $u=\frac{A}{A_1}$, гдѣ A_1 большая полуось эллипсоида описаннаго изъ тѣхъ-же фокусовъ, какъ и притягивающій эллипсоидъ, проведеннаго чрезъ притягиваемую точку. Полуось эта опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_1^2+(B^2-A^2)}+\frac{z^2}{A_1^2+(C^2-A^2)}=1.$$

Выраженіе слагающей притяженія эллипсоида, допуская его однороднымъ, параллельной оси x, выразится формулою:

$$4\pi D . xBC . \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\ \sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}.$$

Подобныя же выраженія можно найдти для слагающихъ параллельныхъ осямъ y и z.

§ 13. Въ заключеніе изслѣдованій Шаля о притяженіи эллипсоидовъ сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній относительно того случая, когда плотность эллипсоида D величина перемѣнная.

Допустимъ, что каждый изъ элементарныхъ слоевъ даннаго эллипсоида имѣетъ одинаковую плотность, на всемъ своемъ протяженіи, и что плотность эта есть функція большой полуоси даннаго слоя, раздѣленной на большую полуось всего разсматриваемаго эллипсоида, слѣдовательно:

$$D=F\left(\frac{a}{A}\right).$$

Изъ уравненія (21) получимъ слѣдующее выраженіе для $\frac{a}{A}$ въ функціи u:

$$\frac{a^2}{A^2} = u^2\left(\frac{x}{A^2} + \frac{y^2}{A^2+u^2(B^2-A^2)} + \frac{z^2}{A^2+u^2(C^2-A^2)}\right),$$

потому:

$$D = F\left(u\left\{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2+u^2(B^2-A^2)} + \frac{z^2}{A^2+u^2(C^2-A^2)}\right\}^{1/2}\right)$$

и слагающая притяженія параллельная оси x приметъ видъ:

$$4\pi BC.x\int_0^{\frac{A}{A_1}} F\left(u\left\{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2+u^2(B^2-A^2)} + \frac{z^2}{A^2+u^2(C^2-A^2)}\right\}^{1/2}\right) \frac{u^2\,du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\;\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}}$$

Если предположимъ, что плотность находится въ обратномъ отношеніи $\frac{a}{A}$, гипотеза, которую принимаетъ большая часть изслѣдователей для плотности земли, то послѣдній интегралъ можетъ быть выраженъ конечнымъ образомъ.

Разсматриваемый интегралъ содержитъ A_1, только въ верхнемъ предѣлѣ, но не въ интегрируемой части, потому изъ него можно получить непосредственно формулу для слагающей притяженія слоя, конечной толщины, заключающагося между двумя подобными и подобнымъ образомъ расположенными эллипсоидами, очевидно она приметъ видъ:

$$4\pi BC.x\int_{\frac{a}{a_1}}^{\frac{A}{A_1}} F\left\{u\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2+u^2(B^2-A^2)} + \frac{z^2}{A^2+u^2(C^2-A^2)}\right)\right\}^{1/2} \frac{u^2\,du}{\sqrt{A^2+u^2(B^2-A^2)}\;\sqrt{A^2+u^2(C^2-A^2)}},$$

гдѣ A_1 и a_1 суть наибольшія полуоси двухъ эллипсоидовъ, проведенныхъ чрезъ притягиваемую точку, изъ которыхъ первый имѣетъ фокусы одинаковые со внѣшнею поверхностью даннаго слоя, второй со внутреннею.

Если допустимъ $u = \frac{A}{A_1} v$, преобразуемъ сообразно съ этимъ условіемъ послѣднюю формулу, то получимъ ее въ томъ видѣ, въ которомъ она обыкновенно употребляется:

$$4\pi \frac{ABC}{A_1} x \int_{\frac{a}{a_1}\frac{A_1}{A}}^{1} \frac{F\left\{v\left(\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A_1^2 + v^2(B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A_1^2 + v^2(C^2 - A^2)}\right)^{1/2}\right\} v^2 dv}{\sqrt{A_1^2 + v^2(B^2 - A^2)}\ \sqrt{A_1^2 + v^2(C^2 - A^2)}}$$

Изложенные пріемы Шаля отчасти пополняютъ выводы Лапласа. Теорія Лапласа, очевидно, отличается болѣе общимъ характеромъ, но и въ тѣхъ случаяхъ, когда она приводитъ къ конечнымъ результатамъ, изъ нихъ не такъ легко и ясно обнаруживаются *основные законы притяженія*. Труды Шаля и Лапласа имѣли и имѣютъ большое значеніе въ теоріи притяженія; по простотѣ и очевидности выводовъ трудъ Шаля не имѣетъ себѣ равнаго въ теоріи разбираемаго вопроса, но въ настоящее время въ основаніе изслѣдованія потенціаловъ и притяженія легли другія начала и методы, къ разсмотрѣнію которыхъ мы и перейдемъ.

ГЛАВА III.

§ 1. При изслѣдованіи свойствъ потенціала:

$$V = \varepsilon \int \frac{dm}{r}, \qquad (1)$$

мы разсмотрѣли только прервыя производныя этой функціи; перейдемъ ко вторымъ производнымъ и найдемъ условія, которымъ онѣ подчинены.

Допустимъ первоначально, что

$$r = \sqrt{(x^1 - x)^2 + (y^1 - y)^2 + (z^1 - z)^2}, \qquad (2)$$

не дѣлается *безконечно-малой величиной или нулемъ* ни для одного изъ элементовъ dm, входящихъ въ формулу (1).

При этомъ допущеніи продифференцируемъ дважды формулу (1), при чемъ дифференцированіе можетъ быть совершено подъ знакомъ интеграла, такъ-какъ подъинтегральная функція не обращается въ безконечность; найдемъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varepsilon \int \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right) \partial m}{\partial x^2} = \varepsilon \int \left(-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(x^1 - x)^2}{r^5} \right) \partial m,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \varepsilon \int \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right) \partial m}{\partial y^2} = \varepsilon \int \left(-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(y^1 - y)^2}{r^5} \right) \partial m,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \varepsilon \int \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right) \partial m}{\partial z^2} = \varepsilon \int \left(-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(z^1 - z)^2}{r^5} \right) \partial m.$$

Сложимъ три послѣднія выраженія, получимъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

основное уравненіе для вывода свойствъ и изслѣдованія потенціала.

Гринъ ввелъ для него обозначеніе

$$\Delta V = 0,$$

принятое и другими писателями. Однако замѣтимъ, что при выводѣ его мы полагали *r отличнымъ отъ нуля и отъ безконечно малой величины*, что можетъ имѣть мѣсто *только въ томъ случаѣ, когда частица, относительно которой опредѣляется потенціалъ, лежитъ внѣ дѣйствующей на нее массы* и *не находится даже на ея поверхности.*

И такъ, если притягиваемая частица находится внѣ массы даннаго, дѣйствующаго на нее тѣла, то сумма вторыхъ частныхъ производныхъ отъ потенціала равна нулю.

Когда же притягиваемая частица лежитъ внутри массы дѣйствующаго на нее тѣла, тогда, очевидно, *r* для нѣкоторыхъ элементовъ *дт*, ближайшихъ къ притягиваемой частицѣ, должно быть безконечно мало; выраженіе подъ знакомъ интеграла приметъ безконечно большое значеніе. Подобное-же затрудне-

ніе мы встрѣчали при опредѣленіи первыхъ производныхъ отъ функціи потенціала для притягиваемой частицы, находящейся внутри данной массы, но мы избѣгнули его (глава I § 6), измѣняя систему координатъ.

Въ настоящемъ случаѣ легко показать, что измѣненіе системы координатъ приведетъ насъ все-таки къ выраженіямъ, въ знаменателяхъ которыхъ заключается безконечно малая величина высшаго порядка, чѣмъ въ числителѣ.

Извѣстно, что

$$\partial m = r^2\,\partial r.\partial\delta.D. = D.r^2\,\partial r\ \mathrm{Sin}\ \theta\partial\theta\,\partial\phi;$$

подставимъ значеніе ∂m въ выраженіе $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, получимъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varepsilon\iint\frac{D}{r}\left(-1+3\,\frac{(x^1-x)^2}{r^2}\right)\partial r\,\partial\delta;$$

замѣтивъ, что

$$\frac{x^1-x}{r} = \mathrm{Cos}\ \theta,\ \partial\delta = \mathrm{Sin}\ \theta.\partial\theta.\partial\phi,$$

найдемъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \varepsilon\iiint\frac{D}{r}(1+3\,\mathrm{Cos}^{\,2}\theta)\,\mathrm{Sin}\ \theta.\partial\theta.\partial\phi.\partial r.$$

Послѣдняя формула очевидно указываетъ, что, при введеніи полярныхъ координатъ во вторыя производныя потенціала, r остается въ знаменателѣ и для элементовъ ближайшихъ къ притягиваемой частицѣ обращается въ безконечно малую величину. Можно было бы подумать, что и весь интегралъ обращается въ безконечность, такъ-какъ при интеграціи выраженія $\int\frac{\partial r}{r}$ въ предѣлахъ $r=0$ и $r=$ конечной величинѣ, оно равняется безконечности; но, принимая во вниманіе остальныя двѣ интеграціи, легко видѣть, что оно можетъ принять и значеніе неопредѣленное. Найдти истинное значеніе послѣдняго выраженія и составляетъ нашу задачу.

Элементъ пирамиды, на которыя разбивается при полярной системѣ координатъ данное тѣло, отсѣкаетъ на его поверхности элементъ поверхности $d\omega$; величины $d\omega$ и $d\delta$ находятся между собою въ простомъ отношеніи. Назовемъ косинусъ угла, который радіусъ, проведенный къ $d\omega$, составляетъ съ нормальной, чрезъ j; то

$$j . d\omega = \pm R^2 d\delta,$$

или

$$d\delta = \pm \frac{j}{R^2} d\omega,$$

гдѣ знакъ зависитъ отъ положительнаго или отрицательнаго значенія косинуса j. Условимся считать то направленіе угла за положительное, для котораго радіусъ, пересѣкающій поверхность, возрастаетъ, а нормальная направлена отъ тѣла.

Подставимъ найденное значеніе $d\delta$ въ формулу (3), получимъ:

$$V = \frac{\varepsilon D}{2} \int j . d\omega , \qquad (6)$$

видъ функціи потенціала, въ которомъ интеграція объема сведена на интеграцію по поверхности. Эта форма потенціала весьма часто примѣняется къ различнымъ изслѣдованіямъ и можетъ быть весьма легко приложена къ разсматриваемому вопросу.

Выраженіе (6) продифференцируемъ относительно x, y, z, найдемъ:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\varepsilon D}{2} \int \frac{\partial j}{\partial x} d\omega; \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon D}{2} \int \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} d\omega;$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\varepsilon D}{2} \int \frac{\partial j}{\partial y} d\omega; \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon D}{2} \int \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} d\omega;$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\varepsilon D}{2} \int \frac{\partial j}{\partial z} d\omega; \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\varepsilon D}{2} \int \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} d\omega.$$

Сложимъ вторыя производныя функціи потенціала V; получимъ:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \Delta V = \frac{\varepsilon D}{2} \int \left(\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 j}{\partial z^2} \right) d\omega. \qquad (7)$$

Выразимъ j въ другой формѣ. Пусть a, b, c косинусы угловъ, которые радіусъ, проведенный къ $d\omega$, составляетъ съ осями; α, β, ε косинусы угловъ, которые нормальная составляетъ съ осями; очевидно

$$j = a\alpha + b\beta + c\varepsilon.$$

Если ξ, η, ζ координаты элемента $d\omega$, то

$$a = \frac{\xi - x}{R};\ b = \frac{\eta - y}{R};\ c = \frac{\zeta - z}{R};$$

слѣдовательно, уравненіе для j приметъ видъ:

$$j = \frac{(\xi - x)\alpha + (\eta - y]\beta + (\zeta - z)\varepsilon}{R},$$

гдѣ $R = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\varepsilon - z)^2}$.

Составимъ дифференціальные коеффиціенты j; будемъ имѣть:

$$\frac{dj}{dx} = \frac{\xi - x}{R^2} j - \frac{\alpha}{R};\quad \frac{dj}{dy} = \frac{\eta - y}{R^2} j - \frac{\beta}{R};\quad \frac{dj}{dz} = \frac{\zeta - z}{R^2} j - \frac{\varepsilon}{R}. \qquad \text{(VI)}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2j}{dx^2} &= \frac{3(\xi - x)^2 - R^2}{R^4} j - 2\,\frac{\xi - x}{R^3}\alpha, \\ \frac{d^2j}{dy^2} &= \frac{3(\eta - y)^2 - R^2}{R^4} j - 2\,\frac{(\eta - y)}{R^3}\beta, \\ \frac{d^2j}{dz^2} &= \frac{3(\varepsilon - z)^2\zeta - R^2}{R^4} j - 2\,\frac{(\zeta - z)}{R^3}\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII)}$$

Допустимъ, что притягиваемая точка μ находится *въ конечномъ разстояніи отъ наружной поверхности* даннаго тѣла; слѣдовательно R не можетъ быть равно нулю или безконечно малой величинѣ, а предъидущія выраженія конечны.

Сложимъ выраженія:

$$\frac{d^2j}{dx^2} + \frac{d^2j}{dy^2} + \frac{d^2j}{dz^2} = -2\left(\frac{(\xi - x)\alpha + (\eta - y)\beta + (\zeta - z)\varepsilon}{R^3}\right)$$

$$= -2\,\frac{j}{R^2},$$

и уравненіе (7) приметъ видъ:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \Delta V = \varepsilon D. \int \frac{j}{R^2} d\omega. \qquad (8)$$

Интеграція полученнаго выраженія не представляетъ затрудненій. Мы уже имѣли:

$$\frac{j}{R^2}\,d\omega = \pm\, d\delta,$$

гдѣ $d\delta$ должно быть разсматриваемо въ томъ-же тѣлесномъ углѣ пирамиды, какъ и элементъ поверхности даннаго тѣла $d\omega$. Когда одному элементу пирамиды соотвѣтствуетъ нѣсколько элементовъ $d\omega$, т. е. когда поверхность даннаго тѣла возвратная, тогда каждому $d\omega$ должны соотвѣтствовать $d\delta$ и они должны входить поперемѣнно съ различными знаками. Здѣсь является существенное различіе въ значеніяхъ ΔV, въ томъ случаѣ, когда точка μ находится *внѣ* даннаго тѣла или *внутри* его.

Если притягиваемая частица μ лежитъ внѣ даннаго тѣла, то элементъ пирамиды пересѣкаетъ четное число разъ поверхность тѣла и изъ уравненія (8), подставивъ первоначально въ него значеніе $d\delta$, получимъ:

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz}=\Delta V=-\varepsilon D\int\left(-1+1\ldots\right)d\delta,$$

или,

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=\Delta V=0,$$

уравненіе, которое мы получили уже прежде.

Если μ лежитъ внутри даннаго тѣла, то число точекъ пересѣченія элементарной пирамиды съ поверхностію *нечетное* и мы получимъ, изъ уравненія же (8),

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=\Delta V=-\varepsilon D\int\left(1-1+1\ldots\right)d\delta,$$

$$=\Delta V=-\varepsilon D\int d\delta,$$

$$=\Delta V=-4\pi\varepsilon D,$$

искомое выраженіе.

И такъ, мы доказали, *что сумма вторыхъ частныхъ*

производныхъ отъ потенціала даннаго однороднаго тѣла равна нулю, если притягиваемая матеріальная частица лежитъ внѣ даннаго притягивающаго тѣла; или *эта сумма равна* $-4\pi\varepsilon D$, *если притягиваемая частица лежитъ внутри даннаго однороднаго тѣла, но не на его поверхности.*

§ 2. Перейдемъ къ излѣдованію выраженія ΔV для тѣлъ *неоднородныхъ;* но первоначально допустимъ, что притягиваемая частица μ не находится на самой поверхности даннаго тѣла, или въ безконечно маломъ отъ нея разстояніи, и что плотность D около точки μ измѣняется сплошнымъ образомъ.

При такихъ условіяхъ вообразимъ поверхность, описанную около μ, на нѣкоторомъ весьма маломъ конечномъ отъ нея разстояніи, внутри которой пусть плотность измѣняется сплошнымъ образомъ. При опредѣленіи значенія ΔV, мы можемъ ограничиться только разсмотрѣніемъ части тѣла, заключающейся внутри вспомогательной поверхности; потому что всѣ точки остальной части даннаго тѣла, лежащія внѣ вспомогательной поверхности, находятся въ конечномъ разстояніи отъ μ, и было доказано, что для массы, находящейся въ подобныхъ условіяхъ, $\Delta V = 0$.

Мы исключили уже случай, когда точка μ лежитъ *на самой поверхности даннаго тѣла,* исключимъ также и тотъ случай, кагда μ лежитъ въ части тѣла, гдѣ существуетъ *разрывъ сплошности;* оба они усложняютъ доказательство, потому мы разсмотримъ ихъ особо.

Форма вспомогательной поверхности, описанной около μ, можетъ быть избрана произвольно; для простоты, допустимъ ее такою, что прямая проведенная изъ μ, будучи продолжена неопредѣленно по одному направленію, пересѣкаетъ эту поверхность только однажды.

Найдемъ первоначально слагающія по осямъ координатъ, той силы, въ которой данное тѣло обнаруживаетъ дѣйствіе на точку μ; покажемъ, что эти слагающія тождественны съ выраженіями дифференціальныхъ коеффиціентовъ перваго порядка отъ функціи потенціала и потомъ воспользуемся ими для дальнѣйшихъ изслѣдованій.

Слагающая параллельная оси x, если косинусъ угла, составляемый прямой проведенной изъ μ къ элементу поверхности назовемъ чрезъ a, какъ извѣстно (глава I, § 6 урав. 12), выражается формулою:

$$X = \varepsilon \int\int D . a dr . d\delta,$$

гдѣ интеграція по r должна быть совершена въ предѣлахъ $r = 0$ и $r = R$, называя чрезъ R значеніе r, соотвѣтствующее точкѣ пересѣченія его съ наружной поверхностію; вторая интеграція должна обнимать собою все тѣлесное угловое пространство около μ. Было также доказано, что предъидущее выраженіе X тождественно съ выраженіемъ $\frac{dV}{dx}$ (глава I, § 6 урав. XIII).

Такъ-какъ a не зависитъ отъ r, то

$$X = \varepsilon \int d\delta a \int D . dr. \qquad (9)$$

Послѣднему выраженію можно дать нѣсколько другой видъ. Вмѣсто элемента $d\delta$ введемъ $d\omega$, элементъ наружной поверхности даннаго тѣла. Съ этою цѣлью мы должны обратиться къ уравненію:

$$d\delta = \pm \frac{j}{R^2} d\omega;$$

замѣчая же, что, въ разсматриваемомъ случаѣ, неопредѣленная прямая проведенная изъ μ пересѣкаетъ наружную поверхность

только разъ и самое пересѣченіе происходитъ изъ внутренней части тѣла наружу, сообразно съ прежними условіями, должно взять:

$$\partial\delta = \frac{j}{R^2}\partial\omega.$$

Подставимъ $\partial\delta$ въ уравненіе (9) получимъ:

$$X = \varepsilon \int \partial\omega . a \frac{j}{R^2} \int_0^R D.\partial r. \qquad (10)$$

Интегралъ (10) еще преобразуемъ. Изберемъ нѣкоторую точку на прямой, проведенной отъ поверхности до частицы μ, и назовемъ ея разстояніе отъ μ чрезъ r, а разстояніе отъ точки пересѣченія съ наружной поверхностію — чрезъ ϱ; очевидно, будемъ имѣть:

$$r = R - \varrho,$$
$$\partial r = -\partial\varrho.$$

Подставимъ въ интегралъ (10) $-\partial\varrho$ вмѣсто ∂r и соотвѣтственно измѣнимъ предѣлы: при $r = 0$, очевидно $\varrho = R$; при $r = R$ должно быть $\varrho = 0$, потому

$$\int_0^R D.\partial r = -\int_R^0 D\partial\varrho = \int_0^R D\partial\varrho$$

при помощи этого замѣненія предъидущее выраженіе для слагающей X приметъ видъ:

$$X = \varepsilon \int \partial\omega . a \frac{j}{R^2} \int_0^R D\,.\,\partial\varrho. \quad (10_a)$$

Подобнымъ-же путемъ можемъ найдти аналитическую форму слагающихъ Y и Z по осямъ координатъ y и z: все отличіе ихъ отъ X должно состоятъ только въ томъ, что вмѣсто a будутъ входить b и c, соотвѣтствующіе имъ косинусы.

Означимъ для краткости:

$$H=\int_0^R D.\partial\varrho;$$

изъ уравненія (10_a) и ему подобныхъ для Y и Z, найдемъ:

$$X=\varepsilon\int\frac{aj}{R^2}H.\partial\omega;\quad Y=\varepsilon\int\frac{bj}{R^2}H.\partial\omega;\quad Z=\varepsilon\int\frac{cj}{R^2}H.\partial\omega. \qquad (11)$$

Если продифференцируемъ выраженія X, Y, Z по x, y, z, то какъ извѣстно должны получить:

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\quad \frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},\quad \frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial^2 V}{\partial z^2};$$

при томъ замѣтимъ, что выраженіе $\partial\omega$, относительно котораго производится интегрированіе, не зависитъ отъ x, y, z.

Для совершенія дифференцированія самымъ дѣломъ назовемъ чрезъ ξ, η, ς координаты элемента поверхности, на которой находится $\partial\omega$, чрезъ α, β, γ косинусы угловъ, которые нормальная, проведенная къ этому элементу, образуетъ съ осями кординатъ; будемъ имѣть:

$$R=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2};$$

$$(\Pi_a)\quad a=\frac{\xi-x}{R},\ b=\frac{\eta-y}{R},\ c=\frac{\zeta-z}{R};$$

$$j=a\alpha+b\beta+c\gamma;$$

отсюда

$$\frac{aj}{R^2}=\frac{(\xi-x)^2\alpha+(\xi-x)(\eta-y)\beta+(\xi-x)(\zeta-z)\gamma}{\{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\varsigma-z)^2\}^2}.$$

Продифференцируемъ послѣднее выраженіе относительно x, введемъ снова значенія R, a, j; получимъ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{aj}{R^2}\right)=-\frac{a\alpha+(4a^2-1)j}{R^3}. \qquad (12)$$

Дифференцируемъ первое изъ уравненій (11), найдемъ:

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\varepsilon\int\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{aj}{R^2}\right)H+\frac{aj}{R^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\right)\partial\omega,$$

Подобныя же выраженія получимъ для $\frac{\partial Y}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial z}$. Подставимъ въ послѣднія выраженія правую часть уравненія (12) и соотвѣтствующія ему выраженія по dy и dz; придемъ къ слагающимъ слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial x} &= \varepsilon\int\left(\frac{-a\alpha+(4a^2-1).j}{R^3}.\ H+\frac{aj}{R^2}\frac{\partial H}{\partial x}\right)d\omega,\\
\frac{\partial Y}{\partial x} &= \varepsilon\int\left(\frac{-b\beta+(4b^2-1)j}{R^3}.\ H+\frac{bj}{R^2}\frac{\partial H}{\partial y}\right)d\omega,\\
\frac{\partial Z}{\partial x} &= \varepsilon\int\left(\frac{-c\delta+(4c^2-1)j}{R^3}.\ H+\frac{cj}{R^2}\frac{\partial H}{\partial z}\right)d\omega
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Сложимъ выраженія (13), замѣчая, что

$$a^2+b^2+c^2=1,$$
$$a\alpha+b\beta+c\delta=j,$$

получимъ:

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\Delta V$$
$$=\varepsilon\int\left(a\frac{\partial H}{\partial x}+b\frac{\partial H}{\partial y}+c\frac{\partial H}{\partial z}\right)\frac{j}{R^2}d\omega. \qquad (14)$$

Возвратимся къ интегралу:

$$H=\int_0^R D.d\varrho.$$

Предѣлы его простираются на всю прямую отъ элемента $d\omega$ наружной поверхности тѣла, координаты котораго ξ, η, ζ, до точки, опредѣляемой координатами x, y, z; слѣдовательно, мы можемъ разсматривать этотъ интегралъ, какъ функцію шести перемѣнныхъ ξ, η, ζ, x, y, z. Три послѣднія перемѣнныя опредѣляются уравненіями:

$$x=\xi-aR;\ y=\eta-bR;\ z=\zeta-cR. \qquad (15)$$

Если допустимъ, что вмѣсто x, y, z въ интегралѣ H вставлены ихъ величины, то мы можемъ разсматривать его какъ функцію ξ, η, ζ, a, b, c. R. При дифференцированіи H по x, y, z

должно принимать ξ, η, ζ, координаты элемента наружной поверхности, за величины постоянныя; слѣдовательно H должно разсматривать только функціею a, b, c, R, величинъ, которыя, въ свою очередь, функціи x, y, z.

На такомъ основаніи будемъ имѣть:

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x}.$$

Изъ выраженій (15) и (Π_a) опредѣлимъ

$$\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{-1+a^2}{R},\quad \frac{\partial b}{\partial x}=\frac{ab}{R},\quad \frac{\partial c}{\partial x}=\frac{ac}{R},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=-a,$$

потому предъидущее уравненіе приметъ видъ:

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial H}{\partial a}\left(\frac{-1+a^2}{R}\right)+\frac{\partial H}{\partial b}\cdot\frac{ab}{R}+\frac{\partial H}{\partial c}\cdot\frac{ac}{R}-\frac{\partial H}{\partial R}\cdot a,$$

который легко преобразовать въ формулу:

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{R}\left(-\frac{\partial H}{\partial a}+a\left(a\frac{\partial H}{\partial a}+b\frac{\partial H}{\partial b}+c\frac{\partial H}{\partial c}\right)\right)-a\frac{\partial H}{\partial R}\quad(17)$$

Послѣдній членъ формулы (17) имѣетъ весьма простое значеніе:

$$\frac{\partial H}{\partial R}=\frac{\partial}{\partial R}\int_0^R D.\,\partial\varrho,$$

гдѣ D плотность той частицы тѣла, которая отстоитъ на разстояніи ϱ отъ элемента, опредѣляемаго координатами ξ, η, ζ, по прямой, соединяющей этотъ элементъ съ частицею μ. Геометрическое положеніе этой частицы, когда элементъ поверхности данъ, опредѣляется величинами a, b, c, ϱ.

При интеграціи по ϱ величины a, b, c, опредѣляющія направленіе прямой, должны быть разсматриваемы постоянными, потому, въ предъидущемъ выраженіи, D представляетъ только функцію ϱ, напримѣръ $D=f(\varrho)$.

h) Извѣстія объ ученo-литературныхъ трудахъ преподавателей университета.

i) Метеорологическія наблюденія, производимыя въ университетѣ.

Изданіе это выходитъ выпусками (по 9 въ годъ).

Подписная цѣна въ годъ 3 руб. сереб. Отдѣльные выпуски продаются по 40 к. сер.

Подписка принимается въ Правленіи университета; тамъ-же продаются отдѣльные выпуски.

Редакціи журналовъ и газетъ, по желанію, могутъ получать *Протоколы* со всѣми приложеніями въ замѣнъ своихъ изданій.